

Собственное состояние коллектива автоматов в дискретной среде

А. Н. Курганский

ИПММ НАНУ, Донецк

Проблематика, касающаяся коллективов автоматов, обширна. Например, в [1] представлена проблематика, связанная с коллективами автоматов в лабиринтах. В настоящей работе изучается коллектив взаимодействующих с геометрической средой автоматов как один цельный автоматоподобный вычислительный объект. Поскольку изучаемый объект распределен по среде, то затруднительно однозначно определить, что является состоянием такого „размытого“ по среде объекта. В отличие от конечного автомата, где мера изменения состояний постоянна и равна одному состоянию в один момент времени, в случае распределенного по среде автоматоподобного вычислительного объекта мера изменения состояния может измеряться по-разному исходя из разных точек зрения на проблему определения состояния коллектива автоматов. В данной работе вводятся понятия внешнего и внутреннего состояний коллектива автоматов, вводится мера изменения состояния как собственное время коллектива автоматов. Введенные понятия исследуются вместе с динамическими свойствами тел.

Через N , Z и R обозначим множества натуральных, целых и действительных чисел. Через T и X обозначим области изменения времени и координат. Средой является бесконечный ориентированный граф с множеством вершин $V = \{x/2 | x \in Z\}$ и дуг $E = \{(x-i/2, x+i/2) | x \in Z, i \in \{-1, 1\}\}$. Пусть $i \in \{-1, 1\}$. Дуга $(x-i/2, x+i/2)$ имеет пространственную абсолютную координату x и направление i . Абсолютную координату дуги e обозначаем через $x(e)$, а направление через $r(e)$. Произвольная дуга e будет также обозначаться через $x(e)^{r(e)}$. Окрестностью дуги x^i назовем пару дуг x^i и $(x+i)^{-i}$. Дуги x^i и $(x+i)^{-i}$ назовем встречными, а x^i и x^{-i} противоположными.

Положим $T = Z$. Элементарным телом назовем конечный автомат с одним состоянием, которое назовем внутренним состоянием. Говорим, что изоморфные автоматы имеют одинаковые цвета, неизоморфные – разные. Пусть имеется всего r различных цветов, пронумерованных целыми числами от 1 до r . В каждый момент времени всякое элементарное тело находится на какой-либо дуге среды. Входным сигналом элементарного тела, находящегося на дуге x^i , является упорядоченный набор чисел $(p_1, p_2, \dots, p_r, q_1, q_2, \dots, q_r)$, называемый состоянием окрестности дуги x^i , где p_k и q_k – число элементарных тел цвета k , находящихся соответственно на дугах x^i и $(x+i)^{-i}$. По определению, в каждый момент времени минимум одна из каждой пары противоположных дуг должна быть пустой. Выходом элементарного тела является

движение: прямолинейное или поворот. Если выходом автомата, находящегося в момент t на дуге x^i , является прямолинейное движение, то в момент $t + 1$ он находится на дуге $(x + i)^i$, и мы говорим, что он не сменил свое внешнее состояние. Если выходом автомата является поворот, то в следующий момент времени он находится на дуге x^{-i} , и мы говорим, что он сменил свое внешнее состояние. Если встречная дуга относительно той, на которой находится элементарное тело, пуста, то тело необходимо движется в прямолинейном направлении, то есть не меняет свое внешнее состояние. Из определения следует, что множество входных сигналов элементарного тела разбивается на два непересекающихся подмножества M и M' таких, что элементы множества M меняют направление его движения, а элементы множества M' нет. Таким образом, элементарное тело однозначно определяется набором входных сигналов M , меняющих направление его движения.

Через $b(t)$ обозначаем дугу, на которой находится элементарное тело b в момент времени t . Через $x_b(t)$ обозначаем абсолютную координату элементарного тела b в момент времени t . Пары пространственных координат x и внешнего времени t будем называть координатами в абсолютной системе отсчета $O = X \times T$ и будем обозначать вектор-столбцами. Абсолютной скоростью элементарного тела b в момент времени t назовем величину $v_b(t) = x_b(t + 1) - x_b(t)$. Скорость назовем равномерной, если $v_b(t)$ константа. Элементарное тело может иметь только одну из следующих равномерных скоростей: $v = 1$, $v = -1$, $v = 0$.

Телом называется произвольная конечная совокупность элементарных тел. Если элементарное тело принадлежит некоторому телу, то будем говорить о нем, как об элементарной части этого тела. Иногда мы рассматриваем бесконечные совокупности элементарных тел, но эти случаи оговариваются. Если тело представляет собой множество всех элементарных тел среды, то называем его свободным.

Приведем два примера тел для иллюстрации последующих определений. В обоих примерах все элементарные тела изоморфны. Таким образом, входным сигналом элементарного тела b в момент времени t является пара чисел (p, q) , где p – число элементарных тел в момент t на дуге $b(t) = x^i$, а q – число элементарных тел на встречной дуге $(x + i)^{-i}$. Элементарное тело меняет направление движения тогда и только тогда, когда $q \neq 0$. В обоих примерах со средой взаимодействует счетное множество элементарных тел. Пронумеруем их целыми числами. Тогда в первом примере в момент времени $t = 0$ элементарное тело с номером $x \in Z$ находится на дуге x^{+1} , если x четное, и на дуге x^{-1} в противном случае. Во втором примере элементарное тело с номером $x \in Z$ в момент времени $t = 0$ имеет координату $4 \cdot \lfloor x/3 \rfloor + (x/3 \bmod 3)$. При этом, если $(x/3 \bmod 3) = 1$, то элементарное тело находится на дуге направления -1 , в противном случае на дуге направления $+1$. Обозначим через $A_1 = Z$ и $A_2 = \{0, 1, 2\}$ бесконечное и конечное тела первого примера, а через $B_1 = Z$ и $B_2 = \{0, 1, 2\}$ тела второго примера.

Пусть конечное тело B состоит из n элементарных тел, пронумерованных числами $\{1, 2, \dots, n\}$. Тогда абсолютной (средней) координатой тела B в момент t назовем величину $x_B(t) = (x_1(t) + \dots + x_n(t))/n$. Абсолютной скоростью тела B в момент t назовем величину $v_B(t) = x_B(t + 1) - x_B(t)$. Тела A_2 и B_2 из примеров имеют рав-

номерные абсолютные скорости перемещения соответственно 0 и $1/3$. Максимально возможные положительная и отрицательная скорости тела равны 1 и -1 .

Координаты тела в общем случае не являются целыми числами. Расширим абсолютную систему отсчета O , координаты которой брались из множества $Z \times Z$, до множества координат $R \times R$. Пусть $t \in Z$ и $-1/2 < \Delta \leq 1/2$, тогда считаем, что элементарное тело b в момент времени $t + \Delta$ имеет пространственную координату $x_b(t + \Delta) = x_b(t) + v_b(t) \cdot \Delta$ и находится на дуге $b(t + \Delta) = b(t)$. Если $\Delta = 1/2$, то также говорим, что тело находится в момент времени $t + \Delta$ в вершине $x_b(t + \Delta)$ среды. Из определения следует, что состояния окрестности дуги $b(t)$ в моменты времени $t + \Delta$ совпадают для всех $\Delta \in (-1/2, 1/2]$ при $t \in Z$. В частности, состояние дуги $b(t)$ в моменты времени t и $t + 1/2$ совпадают, $t \in Z$, и таким образом поведение элементарных тел полностью определяется в вершинах графа среды.

Для произвольного тела B обозначим $B(t' : t'') = \{(b, x_b(t), t) | b \in B, t' < t < t'', t \in R\}$, где $t', t'' \in R \cup \{-\infty, +\infty\}$, $t' < t''$. Пусть $L : O \rightarrow O$ произвольное преобразование системы отсчета, тогда обозначим $L(B(t' : t'')) = \{(b, L(x_b(t), t)) | t' < t < t'', b \in B\}$.

Тело, взаимодействуя с другими телами, испытывает влияние с их стороны и само влияет на них. Естественно такое влияние описать состояниями тел. Мы принимаем, что состояние тела определяется взаимным расположением в среде его элементарных частей. Отсюда, если со временем взаимное расположение частей тела не меняется, то не меняется и состояние тела. С другой стороны, если взаимное расположение частей меняется, то характер этого изменения может быть разным, поскольку изменения могут затронуть все тело целиком или только его часть. Отсюда возникает вопрос о мере изменения состояния тела. Итак, нам надо 1) дать определение состояния тела B и 2) ввести меру $\tau = \tau_B(t)$ изменения состояния тела B с течением абсолютного времени t . Меру $\tau = \tau_B(t)$ назовем собственным временем тела. Независимо от того, как мы определим $\tau = \tau_B(t)$, величину $w_B(t) = \tau_B(t + 1) - \tau_B(t)$ назовем скоростью собственного времени тела B в момент абсолютного времени $t \in Z$.

Определение. Тело B назовем инерциальным, если $v_B(t)$ и $w_B(t)$ константы.

В силу данного выше определения изменения внешнего состояний для элементарного тела, справедливо $t = \tau(t) - \tau(0) + s(t)$, где $t \in Z$, $s(t) = \sum_{i=1}^t |x(i) - x(i-1)|$ – путь, пройденный элементарным телом за время t . Другими словами, элементарное тело тратит абсолютное время либо на перемещение, либо на смену своего внешнего состояния, то есть на собственное время. Пусть теперь B произвольное тело.

Определение. $w_B(t) = 1 \iff \forall_{b \in B} w_b(t) = 1$.

Определение. $w_B(t) = 0 \iff \forall_{b \in B} w_b(t) = 0$.

Таким образом, тело B не меняет свое внешнее состояние, если все его элементарные части не меняют свое внешнее состояние. Другими словами, два тела находятся в среде в одном и том же внешнем состоянии, если одно из них может быть получено из другого прямолинейным сдвигом составляющих их элементарных частей.

Теорема. Если $|v_B(t)| = 1$, то $w_B(t) = 0$.

Доказательство следует из того, что при максимальной скорости невозможны изменения внешнего состояния элементарных частей тела. \square

Введение состояний тел позволяет рассматривать их как автоматоподобные модели алгоритмов. Поскольку два тела с различной абсолютной скоростью заведомо находятся в различных внешних состояниях, и, более того, по внешнему состоянию однозначно определяется абсолютная скорость тела, то введенное понятие внешнего состояния не позволяет говорить о двух телах, перемещающихся с различной скоростью, как о реализациях одного и того же алгоритма. Например, бессмысленно в такой ситуации ставить для тел проблему: может ли свободное тело определить свою абсолютную скорость. Но нам бы хотелось уметь говорить о телах как об одном алгоритме, даже если они перемещаются с различной скоростью. Это будет достигнуто путем введения аффинного изоморфизма тел так, что внешнее состояние тела будет представлено как совокупность двух компонент: скорости тела и его внутреннего состояния, при этом внутреннее состояние тела будет инвариантным относительно скорости.

Рассмотрим два экземпляра E_A и E_B среды E . Пусть O_A и O_B абсолютные системы отсчета соответственно в средах E_A и E_B . Пусть множества, возможно счетные, всех элементарных тел, взаимодействующих с E_A и E_B , образуют соответственно тела A и B такие, что между элементарными частями этих тел существует взаимно однозначное сохраняющее цвет соответствие. Для простоты положим $A = B$, рассматривая тела как множества имен составляющих их элементарных частей. Говорим, что тело A в среде E_A аффинно изоморфно телу B в среде E_B , если существует аффинное преобразование $L : O \rightarrow O$ координат абсолютной системы отсчета такое, что $L(A(-\infty : +\infty)) = B(-\infty : +\infty)$. Тела A_2 и B_2 из представленных выше примеров являются аффинно изоморфными. Соответствующее аффинное преобразование имеет вид:

$$\begin{pmatrix} x_B \\ t_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/2 & 1/2 \\ 1/2 & 3/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_A \\ t_A \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}.$$

Аффинно изоморфные тела мы рассматриваем как пример двух тел, перемещающихся с различной скоростью и реализующих один и тот же алгоритм. Аффинный изоморфизм тел обобщим на состояния тел путем введения инерциальной системы отсчета O_B , связанной с инерциальным телом B . При этом, если тела находятся в аффинно изоморфных состояниях, то мы будем говорить, что они находятся в одном и том же внутреннем состоянии. Смысл системы отсчета, связанной с телом, заключается в определении правила, позволяющего рассматривать другие тела относительно данного. Примером инерциальной системы отсчета служит абсолютная система отсчета O , связанная с произвольным покоящимся инерциальным телом A таким, что $x_A(t) \equiv 0$, $v_A(t) \equiv 0$, $w_A(t) \equiv 1$, и, следовательно, $\tau_A(t) = t$, где τ_A – собственное время A . Системы отсчета, связанные с произвольным инерциальным телом, позволяют сделать эти понятия относительными.

Для произвольных инерциальных тел A и B обозначим через $x_{AB}(\tau_B)$, $v_{AB}(\tau_B)$, $w_{AB}(\tau_B)$ и $\tau_{AB}(\tau_B)$ соответственно координату, скорость перемещения, скорость соб-

ственного времени и собственное время тела A в момент времени τ_B в системе отсчета O_B , связанной с телом B . Собственное время τ_B тела B по определению является внешним временем в системе отсчета O_B . Таким образом, $x_{BB}(\tau_B) \equiv 0$, $v_{BB}(\tau_B) \equiv 0$, $w_{BB}(\tau_B) \equiv 1$.

Пусть инерциальные тела A и B такие, что $A = B$ как множества имен, составляющих их элементарных тел. Говорим, что внутреннее состояние тела A в момент его собственного времени τ_A совпадает с внутренним состоянием тела B в момент его собственного времени τ_B , если $\{(b, x_{bA}(\tau_A)) | b \in A\} = \{(b, x_{bB}(\tau_B)) | b \in B\}$. Таким образом, внешнее состояние тела мы представляем как сочетание двух компонент: скорости тела и его внутреннего состояния. Внутреннее состояние не зависит от скорости тела.

Перечислим ниже свойства, которым по определению удовлетворяют инерциальные системы отсчета.

Свойство 1. Пространственно-временные координаты одних и тех же событий в разных инерциальных системах отсчета связаны аффинным преобразованием. Для произвольных инерциальных тел A и B обозначим через $L_{BA} : O_B \rightarrow O_A$ аффинное преобразование, связывающее O_B и O_A таким образом, что всякое событие (x, τ_B) в системе отсчета O_B совпадает с событием $L_{BA}(x, \tau_B)$ в системе отсчета O_A .

Свойство 2. Поскольку внутреннее состояние не зависит от скорости, то в любой инерциальной системе отсчета максимальная скорость в обоих направлениях должна быть такой же, как и в абсолютной системе отсчета, а именно равной $+1$ или -1 в зависимости от направления.

Введенных условий достаточно, чтобы найти L_{BA} . Не ограничивая общности, полагаем $x_{BA}(0) = 0$ и $\tau_{BA}(0) = 0$. Тогда преобразование L_{BA} линейное. Найдем матрицу этого преобразования $L_{BA} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$.

Поскольку $L_{BA} \cdot \begin{pmatrix} x_{BB}(\tau_{BA}(\tau_A)) \\ \tau_{BA}(\tau_A) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{BA}(\tau_A) \\ \tau_A \end{pmatrix}$ и $\tau_{BA}(\tau_A) = w_{BA}\tau_A$, $x_{BA}(\tau_A) = v_{BA}\tau_A$, $x_{BB}(\tau_B) \equiv 0$, то $L_{BA} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{BA}/w_{BA} \\ 1/w_{BA} \end{pmatrix}$. Отсюда $a_{12} = v_{BA}/w_{BA}$, $a_{22} = 1/w_{BA}$.

Из свойства 2 получаем два равенства: $L_{BA} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha \end{pmatrix}$ и $L_{BA} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\beta \\ \beta \end{pmatrix}$ для некоторых чисел α и β . Откуда в результате простых вычислений получаем $L_{BA} = \begin{pmatrix} 1/w_{BA} & v_{BA}/w_{BA} \\ v_{BA}/w_{BA} & 1/w_{BA} \end{pmatrix}$.

Теорема. *Выполняются равенства $v_{AB} = -v_{BA}$ и $w_{AB} \cdot w_{BA} = 1 - v_{AB}^2 = 1 - v_{BA}^2$.*

Доказательство. Указанные равенства получаются из $L_{AB} \cdot L_{BA} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ в результате простых вычислений. \square

Теорема. $v_{CA} = \frac{v_{BA} + v_{CB}}{1 + v_{BA}v_{CB}}$.

Доказательство. Формула сложения скоростей получается из $L_{CA} = L_{BA} \cdot L_{CB}$ в результате простых вычислений. \square

Рассмотрим два инерциальных тела A и B . Пусть $\tau_{AA}(0) = \tau_{BA}(0) = 0$ и $x_{BA}(0) = 0$. Рассмотрим произвольный момент времени $\tau_A = T_A \neq 0$. Пусть моменты внутреннего времени тела B $\tau_B = T'_B$ и $\tau_B = T''_B$ такие, что $T'_B = w_{BA} \cdot T_A$ и $T_A = w_{AB} \cdot T''_B$. Из равенств $x_{BA}(T_A) = v_{BA} \cdot T_A$ и $x_{AB}(T''_B) = v_{AB} \cdot T''_B = -\frac{v_{BA} \cdot T_A}{w_{AB}}$ следует $x_{BA}(T_A) = -x_{AB}(T''_B) \cdot w_{AB}$. Расстоянием между двумя телами B и C в системе отсчета тела A момент времени $\tau_A = T_A$ назовем величину $|x_{CA}(T_A) - x_{BA}(T_A)|$. Из этого определения и предыдущей формулы следует, что расстояния $l = |x_{BA}(T_A)|$ и $L = |x_{AB}(T''_B)|$ между телами A и B соответственно в системах отсчета O_A и O_B в момент T_A внутреннего времени тела A связаны формулой $l = w_{AB}L$. Этот результат сформулируем в виде теоремы.

Теорема. Пусть длина некоторого объекта в системе отсчета тела A равна l и длина того же объекта в системе отсчета тела B равна L . Тогда $l = w_{AB}L$.

Интересно рассмотреть две формулы из курса специальной теории относительности: $t = t_0 / \sqrt{1 - (v/c)^2}$ и $l = l_0 \sqrt{1 - (v/c)^2}$. Проводя аналогию с полученными выше результатами, получаем, что коэффициент $\sqrt{1 - (v/c)^2}$ в первой формуле имеет физический смысл коэффициента w_{BA} , а во второй формуле коэффициента w_{AB} .

Список литературы

- [1] Г. Килибарда, В.Б. Кудрявцев, Ш.М. Ушчумлич Коллективы автоматов в лабиринтах, Дискретная математика, 2003, 15:3, 3-39.
- [2] Пуанкаре А. О науке. - М.: Наука, 1983. - 560 с.
- [3] Грунский И.С., Курганский А.Н. Динамика коллектива автоматов в дискретной среде // Труды ИПММ НАНУ, 2007, вып. 15, с. 50 – 56