ISSN 1683-4720. Труды ИПММ НАН Украины. 2006. Вып. 12

УДК 517.5

 Е.А. Севостьянов

ТЕОРИЯ СХОДИМОСТИ И КВАЗИЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ БЕЛЬТРАМИ

В статье развивается теория сходимости гомеоморфизмов. На этой основе в работе сформулирован ряд теорем о существовании регулярных гомеоморфных ACL решений для квазилинейных уравнений Бельтрами с вырождением.

1. Введение. Пусть D – область в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$. В 2001г. финский профессор Олли Мартио предложил следующую концепцию. Пусть $Q : D \to [1, \infty]$ – измеримая по Лебегу функция. Говорят, что гомеоморфизм $f : D \to \overline{\mathbb{R}^n}$ является $Q-$**гомеоморфизмом**, если

$$M(f\Gamma) \leq \int\limits_D Q(x) \cdot \rho^n(x) \ \ dm(x) \tag{1}$$

для любого семейства Γ путей γ в D и для каждой допустимой функции $\rho \in adm\Gamma$.

Напомним, что борелева функция $\rho : \mathbb{R}^n \to [0, \infty]$ называется **допустимой** для семейства кривых Γ в D, если

$$\int\limits_\gamma \rho(x) \ \ |dx| \geq 1 \tag{2}$$

для всех путей $\gamma \in \Gamma$. В этом случае мы пишем: $\rho \in adm\,\Gamma$.

Модулем семейства кривых Γ называется величина

$$M(\Gamma) = \inf_{\rho \in adm\,\Gamma} \int\limits_D \rho^2(x) \ \ dm(x)\,. \tag{3}$$

Пусть $E\,, F \in \mathbb{R}^n$ – произвольные множества. Обозначим через $\Gamma(E, F, D)$ семейство всех кривых $\gamma : [a, b] \to \overline{\mathbb{R}^n}$, которые соединяют E и F в D, т.е. $\gamma(a) \in E\,, \gamma(b) \in F$ и $\gamma(t) \in D$ при $a < t < b$. Положим $\Gamma(E, F) = \Gamma(E, F, \overline{\mathbb{R}^n})$.

Кольцевой областью, или **кольцом** в $\overline{\mathbb{R}^n}$ называется двусвязная область R в $\overline{\mathbb{R}^n}$. Пусть R – кольцо в $\overline{\mathbb{R}^n}$ и $C_1\,, C_2$ – связные компоненты множества $\overline{\mathbb{R}^n} \setminus R$. В этом случае пишем:

$$R = R(C_1\,, C_2)\,.$$

Отметим, что согласно теореме 11.3 в [Va]

$$M(\Gamma(C_1, C_2, R)) \ = \ M(\Gamma(C_1, C_2))\,. \tag{4}$$

Отметим также, что указанная величина совпадет с ёмкостью кольца $R\,(C_1\,,\,C_2)$:

$$cap\ R(C_1, C_2) \ = \ M(\Gamma(C_1, C_2, R))\,. \tag{5}$$

Пусть $r_0 = \rho(x_0\,, \partial D)$ и пусть Q – измеримая по Лебегу функция, $Q : D \to [0\,, \infty]$. Положим

$$A(r_1, r_2, x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n : r_1 < |x - x_0| < r_2\}$$

$$S(x_0, r_i) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| = r_i\}\ , \quad i = 1, 2.$$

Следующее понятие, мотивированное кольцевым определением квазиконформности по Герингу, было впервые введено при $n = 2$ в работе [RSY$_2$] и представляет собой обобщение и локализацию понятия $Q-$гомеоморфизма.

Говорят, что гомеоморфизм $f : D \to \overline{\mathbb{R}^n}$ является **кольцевым $Q-$гомеоморфизмом,** если соотношение

$$M\left(\Gamma\left(fS_1,\, fS_2,\, fD\right)\right)\ \le \int\limits_{A} Q(x)\cdot \eta^n(|x-x_0|)\ dm(x) \tag{6}$$

выполнено для любого кольца $A = A(r_1, r_2, x_0)$, $x_0 \in D$, $0 < r_1 < r_2 < r_0$ и для любой измеримой функции $\eta : (r_1, r_2) \to [0, \infty]$, такой, что

$$\int\limits_{r_1}^{r_2} \eta(r)\ dr\ =\ 1\,. \tag{7}$$

При $n\ \geq\ 3$, кольцевые $Q-$ гомеоморфизмы изучались в работе [RS]. Этот класс имеет большое значение при изучении отображений с конечным искажением, см., напр., [AIKM], [GI], [IM], [IS], [KKM$_1$], [KKM$_2$], [KO], [MV$_1$], [MV$_2$] и [HK].

Любой $Q-$гомеоморфизм, по определению, является также и кольцевым $Q-$гомеоморфизмом. Обратное, вообще говоря, неверно.

Следующий класс отображений занимает промежуточное положение между $Q-$гомеоморфизмами и кольцевыми $Q-$гомеоморфизмами.

Гомеоморфизм $f : D \to \overline{\mathbb{R}^n}\,, n\ \geq\ 2$ называется **сильным кольцевым $Q-$гомеоморфизмом**, если

$$M\left(f\left(\Gamma\left(C_1,\, C_2\right)\right)\right)\ \le \int\limits_{D} \rho^n(x)\, Q(x)\, dm(x) \tag{8}$$

для любых двух континуумов C_1 и C_2 в D и любой $\rho \in adm\,\Gamma\ (C_1\,,\,C_2)$.

Теперь пусть $D-$ область в $\mathbb{C}$. Всюду далее по тексту

$$\triangle = \{z\, \in\, \mathbb{C} : |z|\, <\, 1\}\ .$$

Уравнение Бельтрами есть уравнение вида

$$f_{\overline{z}}\ =\ \mu\,(z) f_z\,, \tag{9}$$

где $z\ =\ x\,+\,iy,\ \ f_{\overline{z}}\ =\ (f_x\,+\,if_y)\,/2$ и $f_z\ =\ (f_x\,-\,if_y)\,/2,\ z\ =\ x\,+\,iy,\ \mu : D\ \to \triangle$ – измеримая функция.

Отметим, что линейные уравнения Бельтрами с вырождением исследовались в работах многих авторов, см., напр., [BJ], [Da], [GMSV], [IM], [Kr], [Le], [MM], [MS], [Pe], [Tu] и других.

Уравнение вида

$$f_{\overline{z}}\ =\ \nu\ (z,\, f(z))\ f_z\,, \tag{10}$$

где $\nu\ =\ \nu\ (z,\, w) : D\ \times\ \mathbb{C}\ \to \triangle$, называется **квазилинейным уравнением Бельтрами**.

Говорят, что функция $\nu = \nu(z, w) : D \times \mathbb{C} \to \Delta$ удовлетворяет условиям Каратеодори, если функция ν измерима по $z \in D$ при каждом фиксированном $w \in \mathbb{C}$ и непрерывна по $w \in \mathbb{C}$ при п.в. $z \in D$.

Отображение $f : D \to \mathbb{C}$ называется **абсолютно непрерывным на линиях** $f \in ACL$, если в любом прямоугольнике P с рёбрами параллельными осям координат и таком, что $\overline{P} \subset D$ функция f абсолютно непрерывна на почти всех (п.в.) отрезках в P, которые параллельны осям координат.

В частности, $f \in ACL$, если $f \in W^{1,1}_{loc}$, см. [Ma], с. 8. Отображения класса ACL имеют почти всюду обычные частные производные f_x и f_y. Следовательно, согласно знаменитой теореме Геринга-Лехто, любой ACL гомеоморфизм $f : D \to \mathbb{C}$ является дифференцируемым почти всюду, см. [GL] и [LV], стр. 128. Якобиан сохраняющего ориентацию ACL гомеоморфизма $f : D \to \mathbb{C}$ почти всюду неотрицателен:

$$J_{f(z)} = |f_z|^2 - |f_{\overline{z}}|^2 \geq 0\,, \tag{11}$$

см. [LV], стр. 10.

Комплексной дилатацией ACL гомеоморфизма $f : D \to \mathbb{C}$ в точке z называется величина $\mu(z) = \mu_f(z) = f_{\overline{z}}/f_z$ если $f_z \neq 0$ и $\mu(z) = 0$ в противном случае. **Максимальной дилатацией** называется величина

$$K_\mu(z) = \frac{1 + |\mu(z)|}{1 - |\mu(z)|}\,. \tag{12}$$

Отметим, что в силу условия (11), для сохраняющего ориентацию ACL гомеоморфизма $|\mu(z)| \leq 1$ п.в. и $K_\mu \geq 1$ п.в. Сказанное фактически означает, что любой сохраняющий ориентацию ACL гомеоморфизм удовлетворяет уравнению (10) с $\nu(z, f(z)) = \mu_f(z)$. Данная работа посвящена поиску новых условий на функцию ν, обеспечивающих существование гомеоморфного решения уравнения (10).

Пусть $Q : D \to [1, \infty)$ – измеримая по Лебегу функция. Сохраняющий ориентацию ACL гомеоморфизм $f : D \to \overline{\mathbb{C}}$ называют $Q(z)-$ **квазиконформным**, если

$$K_\mu(z) \leq Q(z) \tag{13}$$

при п.в. $z \in D$ и **квазиконформным**, если $K_\mu \in L^\infty(D)$.

2. О сходимости сильных кольцевых Q-гомеоморфизмов. Аналог следующей леммы был ранее доказан для $Q-$гомеоморфизмов в работах [MRSY] и [RSY$_1$].

Лемма 1. Пусть $D-$ область в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, $\overline{\mathbb{B}^n} \subset D$, $f : D \to \overline{\mathbb{R}^n}-$ сильный кольцевой $Q-$гомеоморфизм с $Q \in L^1_{loc}(\mathbb{B}^n)$, $f(0) = 0$, $h\left(\overline{\mathbb{R}^n} \setminus f(\mathbb{B}^n)\right) \geq \delta > 0$ и $h(f(z_0), 0) \geq \delta$ для некоторого $z_0 \in \mathbb{B}^n$. Тогда для всех $|x| < r = \min(|z_0|/2,\ 1 - |z_0|)$,

$$h(f(x), f(z_0)) \geq \psi(|x|)\,, \tag{14}$$

где $\psi(t)-$ строго возрастающая непрерывная функция с $\psi(0) = 0$, которая зависит только от n, δ и L^1- нормы функции Q в $\mathbb{B}^n$,

Следствие 1. В частности, (14) влечёт, что

$$|f(x)| \geq \psi(|x|)\,. \tag{15}$$

Доказательство. Пусть $y_0 -$ точка в $\mathbb{B}^n$ с $0 < |y_0| < r$. Выберем континуум E_1, который содержит точки 0 и z_0, и континуум E_2, который содержит точку y_0 и $\partial\mathbb{B}^n$, так чтобы $dist\,(E_1, E_2) = |y_0|$. Точнее, обозначим через L прямую линию, проходящую через точки 0 и z_0, а через $P-$ плоскость, определяемую тройкой точек $0, z_0$ и y_0 (если $y_0 \in L$, то $P-$ произвольная плоскость, проходящая через L). Пусть $C-$ окружность, которая образуется при пересечении P и сферы $S^{n-1}\,(y_0, |y_0|) \subset B^n\,(|z_0|)$. Пусть t_0- точка касания C и луча, исходящего из точки z_0, которая противоположна точке y_0 относительно прямой L (произвольная, одна из двух возможных точек касания, если $y_0 \in L$). Тогда $E_1 = [z_0, t_0] \cup \gamma\,(0, t_0)$, где $\gamma\,(0, t_0)-$ кратчайшая дуга C, соединяющая 0 и t_0, и $E_2 = [y_0, i_0] \cup S^{n-1}$, где $S^{n-1} = \partial\mathbb{B}^n -$ единичная сфера в $\mathbb{R}^n$ и i_0- точка (противоположная к t_0 относительно L) пересечения S^{n-1} с прямой линией в плоскости P, перпендикулярной к L и проходящей через y_0.

Обозначим через Γ семейство путей, которые соединяют E_1 и E_2. Тогда

$$\rho(x) = |y_0|^{-1}\chi_{\mathbb{B}^n}(x) \in adm\,\Gamma, \tag{16}$$

поскольку $|y_0| = dist\,(E_1,\ E_2)$ и потому

$$M\,(f\Gamma) \le \int\limits_{\mathbb{B}^n} \rho^n(x)\,Q(x)\,dm(x) \le |y_0|^{-n}\int\limits_{\mathbb{B}^n} Q(x)\,dm(x) = \frac{\|Q\|_1}{|y_0|^n}\,. \tag{17}$$

Кольцевая область $A' = f\,(\mathbb{B}^n \setminus (E_1 \cup E_2))$ разделяет континуумы $E_1' = f\,(E_1)$ и $E_2' = \overline{\mathbb{R}^n} \setminus f\,(\mathbb{B}^n \setminus E_2)$ и, т.к.

$$h\,(E_1') \ge h\,(f(z_0), 0) \ge \delta\,, \quad h\,(E_2') \ge h\left(\overline{\mathbb{R}^n} \setminus f\,(\mathbb{B}^n)\right) \ge \delta \tag{18}$$

и

$$h\,(E_1', E_2') \le h\,(f\,(y_0), 0)\,, \tag{19}$$

то

$$M\,(f\,(\Gamma)) \ge \lambda\,(h\,(f\,(y_0), 0))\,, \tag{20}$$

где $\lambda(t) = \lambda_n\,(\delta, t) -$ строго убывающая положительная непрерывная функция с $\lambda(t) \to \infty$ при $t \to 0$, см. 12.7 в [Va]. Таким образом, по (17) и (20)

$$|f\,(y_0)| > h\,(f(y_0), 0) \ge \psi(|y_0|)\,, \tag{21}$$

где функция

$$\psi(t) := \lambda^{-1}\left(\frac{\|Q\|_1}{t^n}\right) \tag{22}$$

имеет требуемые свойства. $\Box$

Аналог следующей леммы был доказан в работе [RSY$_1$] для $Q-$гомеоморфизмов на плоскости. В работе [S] было получено обобщение для того же класса отображений в пространственном случае.

Лемма 2. Пусть $D-$ область в $\mathbb{R}^n$, $n \ge 2$, $f_m : D \to \overline{\mathbb{R}^n}$ – последовательность сильных кольцевых $Q-$гомеоморфизмов с $Q \in L^1_{loc}$, сходящаяся локально равномерно в D к некоторому отображению f. Тогда либо $f-$ гомеоморфизм в D, либо $f\equiv const$ в D.

Доказательство. Как локально равномерный предел непрерывных отображений f_m, отображение f непрерывно. Пусть f не является тождественно постоянной в D.

Покажем сначала, что f – дискретное отображение. Предположим противное. Тогда найдётся точка $x_0\in D$ и последовательность $x_k\in D$, $x_k\ne x_0$, $k=1,2\ldots$, такая что $x_k\to x_0$ при $k\to\infty$ с $f(x_k)=f(x_0)$. Заметим, что множество $E_0=\{x\in D: f(x)=f(x_0)\}$ замкнуто в D по непрерывности f и не совпадает с D, т.к. $f\not\equiv const$. Поэтому x_0 можно заменить неизолированной граничной точкой множества E_0.

Без ограничения общности рассуждений, можно считать, что $x_0=0$, $f_m(0)=f(0)=0$, $\overline{\mathbb{B}^n}\subset D$ и, кроме того, найдётся хотя бы одна точка $z_0\in\mathbb{B}^n$, где $f(z_0)\ne 0$. В силу непрерывности хордальной метрики

$$h\left(f_m\left(z_0\right),0\right)\geq\delta_0/2\,,\qquad m\geq M, \tag{23}$$

где $\delta_0=h(f(z_0),0)>0$. Т.к. $\overline{\mathbb{B}^n}$ – компакт в D, $f_m\to f$ равномерно в $\overline{\mathbb{B}^n}$, мы имеем для больших m неравенство

$$h\left(\overline{\mathbb{R}^n}\backslash f_m\left(\overline{\mathbb{B}^n}\right)\right)\geq\delta_*/2\,, \tag{24}$$

где $\delta_*=h\left(\overline{\mathbb{R}^n}\backslash f\left(\overline{\mathbb{B}^n}\right)\right)$. Пусть $\delta_0=\min\left(\delta_0/2,\,\delta_*/2\right)$. Согласно Лемме 1 получаем, что для всех $x\in B(0,r)$ и $r=\min\{\frac{|z_0|}{2},1-|z_0|\}$

$$|f_m(x)|\ \geq\ \psi(|x|)\,,\quad m\geq M, \tag{25}$$

где ψ – строго возрастающая функция с $\psi(0)=0$, которая зависит только от L^1-нормы Q в $\mathbb{B}^n$, n и δ. Переходя в последнем неравенстве к пределу при $m\to\infty$, получаем, что

$$|f(x)|\ \geq\ \psi(|x|),\ \ x\in\ B\left(0,r\right)\,. \tag{26}$$

Но тогда, в частности,

$$0\ =\ |f(x_k)|\ \geq\ \psi(|x_k|),\quad\forall\ k\geq k_0,$$

т.е., $\psi(|x_k|)=0$ при всех $k\geq k_0$, что противоречит строгому возрастанию функции ψ. Полученное противоречие показывает, что f дискретно.

Покажем, что f инъективно в D. Предположим противное, а именно, что существуют $x_1,x_2\in D$, $x_1\ne x_2$, с $f(x_1)=f(x_2)$. Пусть $x_2\not\in\overline{B(x_1,t)}\subset D$ при $t\in(0,t_0]$. Тогда $f_m(\partial B(x_1,t))$ отделяет $f_m(x_1)$ от $f_m(x_2)$ и, следовательно,

$$h(f_m(x_1),f_m(\partial B(x_1,t))\ <\ h\left(f_m(x_1),f_m(x_2)\right)\,. \tag{27}$$

Пусть расстояние $h(f_m(x_1),f_m(\partial B(x_1,t))$ достигается в точке $x_{m,t}\in\partial B(x_1,t)$, т.е., $h(f_m(x_1),f_m(\partial B(x_1,t))=h(f_m(x_1),f_m(x_{m,t}))$. Так как граница шара в $\mathbb{R}^n$ является компактным множеством, найдётся подпоследовательность $x_{m_k,t}\to x_t\in\partial B(x_1,t)$. Поскольку локально равномерная сходимость непрерывных функций влечёт непрерывную сходимость, см., напр., Теорему 3 на с. 229 в [Ku], получаем, что

$$h(f_{m_k}(x_{m_k,t}),f(x_t))\to 0$$

при $k\to\infty$. Таким образом, с учётом неравенства (27) имеем, что

$$h(f(x_1),f(x_t))\ \leq\ h(f(x_1),f(x_2))\ \ \forall\, t\,\in\,(0\,,\,t_0]\,.$$

Так как по предположению $h(f(x_1),f(x_2))=0$, то из последнего неравенства следует, что $f(x_t)=f(x_1)$, для всех $t\in(0,t_0]$, что противоречит дискретности отображения f, доказанной выше. Непрерывность обратного отображения f^{-1} следует также из (26). Лемма 2 доказана.

Основным результатом этой секции является следующее утверждение.

Теорема 1. Пусть $D-$ область в $\mathbb{R}^n$, $n\geq 2$, $f_m : D\to\overline{\mathbb{R}^n}$ – последовательность сильных кольцевых $Q-$гомеоморфизмов с $Q\,\in\,L^1_{loc}$, сходящаяся локально равномерно в D к некоторому отображению f. Тогда либо $f-$ сильный кольцевой $Q-$гомеоморфизм в D, либо $f\equiv const$ в D.

Доказательство. То, что предельное отображение f является либо гомеоморфизмом, либо постоянной, является утверждением Леммы 2. Осталось показать, что для предельного отображения f выполнено неравенство

$$M\left(\Gamma\left(f_1,\,f_2,\right)\right)\ \leq\int\limits_A Q(x)\cdot\rho^n(x)\ dm(x) \tag{28}$$

для любых континуумов C_1 и $C_2\,\subset\,D$ и любой $\rho\,\in\,adm\,\Gamma\,\left(fC_1\,,\,fC_2\right)$.

Это вытекает из равномерной сходимости колец $R_m\,=\,R\left(f_mC_1\,,\,f_mC_2\right)$ к кольцу $R\,=\,R\left(fC_1\,,\,fC_2\right)$, что влечёт сходимость $cap\,R_m\,\to\,cap\,R$, см. [Ge$_2$] и [Ge$_3$], а также из того, что правая часть соотношения (28) не зависит от m. ☐

3. О сходимости обратных гомеоморфизмов. Абстрактные пространства со сходимостью были введены в диссертации Фреше (1906). Точнее, произвольное множество X называется $\mathfrak{L}-$ **пространством**, если в нём выделен некоторый класс последовательностей, называемых сходящимися, причём каждой такой последовательности $x_1,x_2,\ldots,x_m,\ldots$ поставлен в соответствие некоторый элемент $x\,=\,\lim\limits_{m\to\infty}x_m$ таким образом, что выполняются следующие условия (аксиомы):

1. Если $\lim\limits_{m\to\infty}x_m\,=\,x$, то и для любой подпоследовательности $\lim\limits_{k\to\infty}x_{m_k}\,=\,x$.

2. Если $x_m\,=\,x$ для всех m , то $\lim\limits_{m\to\infty}x_m\,=\,x$.

Позже Урысон предложил добавить ещё одну аксиому:

3. Если последовательность x_m не сходится к x , то она содержит подпоследовательность x_{m_k} , никакая подпоследовательность которой не сходится к x .

Точкой прикосновения последовательности $x_m\,,m=1,2,\ldots$, называется предел какой-либо сходящейся её подпоследовательности.

Последовательность $x_m\,,m=1,2,\ldots$, называется **компактной,** если из любой её подпоследовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность.

На основании работы [Ur], имеем следующее утверждение, см. также [Ku] , с.199.

Предложение 1. Если компактная последовательность $x_m\,,m=1,2,\ldots$ имеет единственную точку прикосновения x , то $\lim\limits_{m\to\infty}x_m\,=\,x$.

Теперь мы в состоянии сформулировать и доказать утверждение о сходимости обратных отображений.

В дальнейшем ρ обозначает эвклидово расстояние между множествами в $\mathbb{R}^n$

$$\rho\,(A,B)\;=\inf_{x\,\in\,A\,,y\,\in\,B}|x-y|\,.$$

Везде ниже $D-$ область в $\mathbb{R}^n$, а $\partial D-$ граница D в $\mathbb{R}^n$.

Теорема 2. Пусть $f_m\,:\,D\rightarrow\,\mathbb{R}^n\,, m\,=\,1,2,\ldots\,,-$ последовательность гомеоморфизмов, сходящаяся локально равномерно в D к гомеоморфизму f при $m\,\rightarrow\,\infty$. Тогда последовательность обратных отображений f_m^{-1} сходится в $D'\,=\,f(D)$ локально равномерно к отображению f^{-1} при $m\,\rightarrow\,\infty$.

Доказательство Теоремы 2 базируется на следующих вспомогательных утверждениях.

Лемма 3. Пусть $f_m\,:\,D\rightarrow\,\mathbb{R}^n\,, m\,=\,1,2,\ldots\,,-$ последовательность гомеоморфизмов, сходящаяся локально равномерно в D к гомеоморфизму f при $m\,\rightarrow\,\infty$.

Тогда для любого $x_0\,\in\,D$ и для любого $\rho_0\,<\,\rho(x_0\,,\partial D)$ существует $\delta\,=\,\delta(x_0,\rho_0)>0$ такое, что

$$B\left(f_m(x_0)\,,\delta\right)\,\subseteq\,f_m\left(B\left(x_0\,,\,\rho_0\right)\right) \tag{29}$$

для всех $m\,\geq\,N\,=\,N(x_0\,,\rho_0)$.

Доказательство. Предположим противное, а именно, что существуют $x_0\,\in\,D$ и $\rho_0\,\in\,(0\,,\rho\left(x_0\,,\partial D\right))$ такие, что для любого $\delta\,>\,0$ и для любого сколь угодно большого номера $m_0\,\in\,\mathbb{N}$ найдётся $m_\delta\,\geq\,m_0$:

$$\rho\left(f_{m_\delta}(x_0)\,,\partial f_{m_\delta}\left(B(x_0\,,\rho_0)\right)\right)\,<\,\delta\,. \tag{30}$$

Последнее соотношение на языке последовательностей означает, что для любой последовательности $\delta_k\,>\,0\,,\ \delta_k\,\rightarrow\,0$ найдётся возрастающая последовательность номеров m_k такая, что

$$\rho\,\left(f_{m_k}(x_0)\,,\partial f_{m_k}\left(B(x_0\,,\rho_0)\right)\right)\,<\,\delta_k\,. \tag{31}$$

Т.к. каждое из отображений f_m является гомеоморфизмом и шар $B(x_0\,\rho_0)$ целиком лежит в D, будем иметь

$$\partial f_{m_k}\left(B(x_0\,,\rho_0)\right)\,=\,f_{m_k}\left(\partial B(x_0\,,\rho_0)\right)\,. \tag{32}$$

Пусть $y_{m_k}\,\in\,\partial f_{m_k}\left(B(x_0\,,\rho_0)\right)-$ такой элемент, что

$$\rho\,\left(f_{m_k}(x_0)\,,\partial f_{m_k}\left(B(x_0\,,\rho_0)\right)\right)\,=\,|\,f_{m_k}(x_0)\,-\,y_{m_k}\,|\,. \tag{33}$$

С учётом соотношения (32), существует последовательность $z_{m_k}\,\in\,\partial B(x_0\,,\varepsilon)\,:\,y_{m_k}\,=\,f_{m_k}\left(z_{m_k}\right)$. Не ограничивая общности рассуждений, учитывая, что граница шара является компактным множеством, можно считать, что

$$z_{m_k}\,\rightarrow\,z_0\,\in\,\partial B(x_0\,,\rho_0)\,. \tag{34}$$

Отсюда следует, что $z_0\,\neq\,x_0$.

Однако, в терминах z_{m_k}, соотношение (31) можно переписать в виде

$$|f_{m_k}(x_0)-f_{m_k}\left(z_{m_k}\right)|<\delta_k. \tag{35}$$

По неравенству треугольника

$$\begin{gathered}|\,f(x_0)\,-\,f(z_0)\,|\,\leq\,|\,f(x_0)\,-\,f_{m_k}(x_0)\,|\,+\\ +\,|\,f_{m_k}(x_0)\,-\,f_{m_k}(z_{m_k})\,|\,+\,|\,f_{m_k}(z_{m_k})\,-\,f(z_0)\,|\,.\end{gathered} \tag{36}$$

Известно, что локально равномерная сходимость влечёт непрерывную сходимость, см. Теорему 3 на с.229 из [Ku]. Поэтому, переходя к пределу при $k \to \infty$ в соотношении (36), с учётом соотношения (35), получаем, что $f(x_0) = f(z_0)$. Однако, последнее равенство невозможно, поскольку $f-$ гомеоморфизм. Лемма 3 доказана. $\Box$

Лемма 4. Пусть $f_m : D \to \mathbb{R}^n, m = 1, 2, \ldots, -$ последовательность гомеоморфизмов, сходящаяся локально равномерно в D к гомеоморфизму f при $m \to \infty$.

Тогда для любого $\delta > 0$, для любого $x_0 \in D$ и любого $n \geq N = N(x_0, \delta)$

$$B(f(x_0), \delta/2) \subseteq B(f_m(x_0), \delta) . \tag{37}$$

Доказательство. Докажем Лемму 4 от противного. Предположим, что существуют $\delta > 0$ и $x_0 \in D$, для которых найдётся возрастающая последовательность номеров m_k :

$$|f(x_0) - y_{m_k}| < \delta/2, \tag{38}$$

$$|f_{m_k}(x_0) - y_{m_k}| \geq \delta, \ k = 1, 2 \ldots . \tag{39}$$

В силу неравенства треугольника и соотношения (38), получим

$$|y_{m_k} - f_{m_k}(x_0)| < |f(x_0) - f_{m_k}(x_0)| + \delta/2. \tag{40}$$

Однако, это противоречит (39) при $k \to \infty$. $\Box$

Лемма 5. Пусть $f_m : D \to \mathbb{R}^n, m = 1, 2, \ldots, -$ последовательность гомеоморфизмов, сходящаяся локально равномерно в D к гомеоморфизму f при $m \to \infty$.

Тогда для любого $x_0 \in D$ и для любого $\rho_0 < \rho(x_0, \partial D)$ существует $r = r(x_0, \rho_0) > 0$ такое, что

$$B(f(x_0), r) \subseteq f_m(B(x_0, \rho_0)) \tag{41}$$

для всех $m \geq N = N(x_0, \rho_0)$.

Доказательство. Согласно Лемме 3, при некотором $\delta = \delta(x_0, \rho_0)$ и при $m \geq N_1 = N_1(x_0, \rho_0)$

$$B(f_m(x_0), \delta) \subseteq f_m(B(x_0, \rho)) . \tag{42}$$

Согласно Лемме 4,

$$B(f_m(x_0), \delta) \supseteq B(f(x_0), \delta/2) \tag{43}$$

при $m \geq N_2 = N_2(x_0, \varepsilon)$.

Но тогда при $m \geq \max\{N_1, N_2\}$ из соотношений (42) и (43) будем иметь

$$f_m(B(x_0, \varepsilon)) \supseteq B(f(x_0), \delta/2) . \tag{44}$$

Это и есть в точности соотношение (41) с $r = \delta/2$. Лемма 5 доказана. $\Box$

Доказательство Теоремы 2. Необходимо показать для начала, что все отображения f_j^{-1} определены на любом компакте $K' \subseteq D'$, начиная с некоторого номера $N = N(K')$.

Согласно Лемме 5 для произвольных чисел $\rho(x_0) > 0$ с $\rho(x_0) < \rho(x_0, \partial D)$ существуют числа $r(x_0)$, такие, что относительно каждого шара $B(f(x_0), r(x_0))$ выполнялось соотношение (41) при $m \geq N(x_0)$. Из покрытия $B(f(x_0), r(x_0))$, $f(x_0) \in K'$, компакта K' можно выделить конечное подпокрытие: $B(f(x_i), r(x_i))$, $i = 1, 2, \ldots, s$.

По построению,

$$B\left(f(x_i)\,,r(x_i)\right)\,\subseteq\,f_m\left(B(x_i\,,\rho(x_i))\right)\quad\forall\,i\,=\,1\,,\ldots\,,s \tag{45}$$

и, следовательно,

$$\bigcup_{i=1}^{s}\,f_m\,\left(B\left(x_i\,,\rho\left(x_i\right)\right)\right)\,\supset\,K'\,. \tag{46}$$

Включение (46) означает, что все f_m^{-1} определены на любом компакте K' из $D'=f(D)$, начиная с некоторого номера $N\,=\,N(K)$.

Покажем, что последовательность f_m^{-1} сходится к f^{-1} локально равномерно в D'. Согласно Теореме 3, с. 229 из [Ku] о связи между равномерной и непрерывной сходимостью, достаточно показать, что последовательность f_m^{-1} сходится в K' непрерывно к отображению f^{-1}.

Пусть $y_k\,\in\,K'$– произвольная сходящаяся последовательность, $y_k\,\rightarrow\,y_0$. Нужно показать, что $f_k^{-1}(y_k)\,\rightarrow\,f^{-1}(y_0)$ при $k\,\rightarrow\,\infty$.

В силу включения (46) последовательность $f_k^{-1}(y_k)$ ограничена, а потому является компактной. Пусть $f_{k_l}^{-1}\,(y_{k_l})$ – произвольная сходящаяся подпоследовательность $f_k^{-1}(y_k)$. Достаточно показать, что $f_{k_l}^{-1}\,(y_{k_l})\,\rightarrow\,f^{-1}(y_0)$.

Пусть $z_l\,:=\,f_{k_l}^{-1}\,(y_{k_l})\,\rightarrow\,C$. Т.к. по условию последовательность f_j сходится к f в D локально равномерно, снова по Теореме 3, с. 229 из [Ku], будем иметь, что

$$f_{k_l}(z_l)\,\rightarrow f(C)$$

при $l\rightarrow\infty$. Отсюда следует, что $y_{k_l}\,\rightarrow\,f(C)$ при $l\rightarrow\infty$, откуда $f(C)\,=\,y_0$ и $C\,=\,f^{-1}(y_0)$. Что и требовалось доказать.□

4. Основная лемма.

Лемма 6. Пусть функция $\nu\,=\,\nu\,(z,\,w):\Delta\,\times\mathbb{C}\,\rightarrow\Delta$ удовлетворяет условиям Каратеодори и

$$K_\nu\,(z,\,w)\,:=\,\frac{1\,+\,|\nu\,(z,\,w)|}{1\,-\,|\nu\,(z,\,w)|}\,\leq\,Q(z)\,\in\,L^1_{loc}\,(\Delta) \tag{47}$$

при п.в. $z\,\in\Delta$ для любого $w\,\in\,\mathbb{C}$. Если для любого $z_0\,\in\Delta$

$$\int\limits_{\varepsilon<|z-z_0|<\varepsilon_0} Q(z)\cdot\psi^2(|z-z_0|)\;dm(z)\leq c\cdot I^p(\varepsilon),\;\varepsilon\in(0,\varepsilon_0), \tag{48}$$

где $p\,\in\,(0\,,2)$ и $\psi(t)$ – неотрицательная измеримая функция на $(0,\infty)$, такая что

$$0\,<\,I(\varepsilon)=\int\limits_{\varepsilon}^{\varepsilon_0}\psi(t)dt<\infty,\;\varepsilon\in(0,\varepsilon_0), \tag{49}$$

$I(\varepsilon)\,\rightarrow\,\infty$ при $\varepsilon\,\rightarrow\,0$, то уравнение (10) имеет регулярное гомеоморфное ACL решение f в Δ, такое, что $f^{-1}\,\in\,W^{1,2}_{loc}$.

Доказательство. Рассмотрим последовательность функций

$$\nu_n\,(z,\,w)=\begin{cases}\nu\,(z,\,w)\,, & Q(z)\,\leq\,n,\,w\,\in\,\mathbb{C}\,,\\ 0\,, & Q(z)\,>\,n\,,w\,\in\,\mathbb{C}\,.\end{cases} \tag{50}$$

Заметим, что $K_{\nu_n}(z,\,w)\;\le\;n$ при п.в. $z\in\triangle$ и для всех $w\;\in\;\mathbb{C}$. Следовательно,

$$\nu_n\,(z,\,w)\;\le\;\frac{n-1}{n+1}\;<\;1\,, \tag{51}$$

поэтому уравнение (10) имеет гомеоморфное решение $f_n:\triangle\to\;\mathbb{C}$ с нормировками $f_n(0)\;=\;0\,,\;f_n(1)\;=\;1$, которое является $n-$квазиконформным в $\triangle$, см. [Bo], Теорема 8.2.

Одновременно, f_n являются $Q(z)-$квазиконформными в силу соотношения (47) и того, что $K_{\nu_n}(z,\,w)\;\le\;K_\nu(z,\,w)$. Следовательно, согласно V (6.6) в [LV], каждое f_n является $Q-$гомеоморфизмом, а, значит, и кольцевым $Q-$гомеоморфизмом. Применяя Лемму 3.23 из работы [RS], учитывая соотношения (48), (49) и то, что $I(\varepsilon)\;\to\;\infty$ при $\varepsilon\;\to\;0$, получаем, что последовательность $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ имеет подпоследовательность f_{n_k}, которая сходится локально равномерно к некоторому отображению f. В силу Следствия 5.12 из [RSY$_1$] и в силу того, что $f_n(0)\;=\;0\,,\;f_n(1)\;=\;1$, предельное отображение $f\;\;Q-$квазиконформно.

Заметим, что для п.в. $z\in\triangle$ существует номер $k_0\;=\;k_0(z):\;\nu_{n_k}(z,\,w)\;=\;\nu(z,w)$ при $n_k\;\ge\;n_{k_0}(z)$ и всех $w\;\in\;\mathbb{C}$. Поэтому для п.в. z

$$\mu_{n_k}(z)\;=\;\nu_{n_k}\,(z,\,f_{n_k}\,(z))\;\to=\;\nu\,(z,\,f(z)) \tag{52}$$

при $k\;\to\;\infty$. Пусть $\mu(z)-$ характеристика предельного отображения f. Применяя вторую часть Следствия 5.12 из [RSY$_1$], получаем, что п.в. $\nu\,(z,\,f(z))\;=\;\mu(z)$. Но это и означает, что отображение f является решением исходного уравнения (10).

Осталось показать, что f – регулярное и что $f^{-1}\;\in\;W^{1,2}_{loc}$. Т.к. f – гомеоморфизм, то по Теореме 2 $f_n^{-1}\;\to\;f^{-1}$ локально равномерно при $n\to\infty$. Обозначим $g_n\;=\;f_n^{-1}$. Будем иметь:

$$\int\!\!\int\limits_{B}|\partial g_n|^2\,du\,dv\;=\;\int\!\!\int\limits_{g_n(B)}\frac{dx\,dy}{1\,-\,|\mu_n(z)|^2}\;\le\;\int\!\!\int\limits_{B^*}Q(z)\,dx\,dy\;<\;\infty$$

для достаточно больших n, где B и B^* - относительно компактные области в $\triangle$ и $f(\triangle)$, такие, что $g(\overline{B})\;\subset\;B^*$. Замена переменных в интегралах справедлива, ибо $g_n\,,f_n\;\in\;W^{1,2}_{loc}$. Последняя оценка влечёт, что $f^{-1}\;\in\;W^{1,2}_{loc}\;(f\,(\triangle))$, см. [Re$_1$], Глава III, Лемма 3.5. Отсюда следует, что f обладает $(N^{-1})-$свойством, см. [Re$_2$], что в свою очередь эквивалентно тому, что $J_f(z)\;\ne\;0$ п.в., см. [Po]. Лемма доказана. □

5. Теоремы существования. Обозначим через $q_{z_0}(r)$ среднее значение функции $Q(z)$ над окружностью $\{|z-z_0|=r\}$.

Теорема 3. Пусть функция $\nu(z,w):\triangle\times\mathbb{C}\;\to\triangle$ удовлетворяет условиям Каратеодори и пусть $K_\nu(z,\,w)\;\le\;Q(z)\;\in\;L^1_{loc}(\triangle)$. Если

$$\int\limits_0^{\delta(z_0)}\frac{dr}{r\,q_{z_0}(r)}\;=\;\infty\,, \tag{53}$$

где $\delta(z_0)\;=\;dist(z_0\,,\partial\triangle)$, то уравнение (10) имеет регулярное гомеоморфное ACL решение в $\triangle$.

Теорема 4. Пусть функция $\nu(z,w)\;:\triangle\times\mathbb{C}\;\to\triangle$ удовлетворяет условиям Каратеодори. Если $K_\nu(z,\,w)\;\le\;Q(z)\;\in\;FMO(\triangle)$, то уравнение (10) имеет регулярное гомеоморфное ACL решение в $\triangle$.

Следствие 2. Пусть функция $\nu(z,w):\triangle\times\mathbb{C}\to\triangle$ удовлетворяет условиям Каратеодори. Если $K_\nu(z,\,w)\,\leq\,Q(z)$

$$q_{z_0}(r)\,=\,O\left(\log\frac{1}{r}\right)\quad\forall\quad z_0\in\triangle \tag{54}$$

при $r\,\to\,0$, то уравнение (10) имеет регулярное гомеоморфное ACL решение в $\triangle$.

Следствие 3. Пусть функция $\nu(z,w):\triangle\,\times\mathbb{C}\to\triangle$ удовлетворяет условиям Каратеодори. Если $K_\nu(z,\,w)\,\leq\,Q(z)\,\in\,L^1_{loc}(\triangle)$ и

$$\overline{\lim_{\varepsilon\to0}}\,\fint_{B(z_0,\,\varepsilon)}Q(z)\,dm(z)\,<\,\infty\quad\forall\,z_0\in\triangle\,, \tag{55}$$

то уравнение (10) имеет регулярное гомеоморфное ACL решение.

AIKM *Astala K., Iwaniec T., Koskela P. and Martin G.* Mappings of BMO-bounded distortion, Math. Annalen 317 (2000), 703-726.

Bo *Боярский Б.В.* Обобщённые решения системы дифференциальных уравнений 1-го порядка эллиптического типа с разрывными коэффициентами, матем. сб., 43(85), №4, 451-503.

BJ *Brakalova M.A. and Jenkins J.A.* On solutions of the Beltrami equation, J.Anal.Math. 76 (1998), 67-92.

Da *David G.* Solutions de l'equation de Beltrami avec $\|\mu\|_\infty\,=\,1$, Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. AI. Math. AI. 13, no.1 (1988), 25-70

Ge_1 *Gehring F.W.* A remark on the moduli of rings, Comment. Math. Helv. 36 (1961), 42-46.

Ge_2 *Gehring F.W.* Rings and quasiconformal mappings in space, Trans. Amer. Math. Soc. – 1962. – 103., 353-393.

Ge_3 *Gehring F.W.* Extremal length definitions for the conformal capasity of rings in space, Comment. Math. Helv., 36(1961), 42-46.

GI *Gehring F.W. and Iwaniec T.* The limit of mappings with finite distortion, Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. 24 (1999), 253-264.

GL *Gehring F.W. and Lehto O.,* On the total differentiability of functions of a complex variable, Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. AI. 272(1959), 1-9.

GMSV *Gutlyanskii V., Martio O., Sugawa T. and Vuorinen M.* On the degenerate Beltrami equation, 2001, 32pp. Preprint of Departament of Mathematics, University of Helsinki, 2001. – 282.

HK *Heinonen J. and Koskela P.* Sobolev mappings with integrable dilatations, Arch. Rational Mech. Anal. 125 (1993), 81-97.

IM *Iwaniec T. and Martin G.* Geometrical Function Theory and Non–linear Analysis, Clarendon Press, Oxford, 2001.

IS *Iwaniec T. and Šverák V.* On mappings with integrable dilatation, Proc. Amer. Math. Soc. 118 (1993), 181-188.

KKM_1 *Kauhanen J., Koskela P. and Maly J.* Mappings of finite distortion: discreteness and openness, Arch. Rational Mech. Anal. 160 (2001), 135-151.

KKM_2 *Kauhanen J., Koskela P. and Maly J.* Mappings of finite distortion: condition N, Michigan Math. J. 49 (2001), 169-181.

KO *Koskela P. and Onninen J.* Mappings of finite distortion: capacity and modulus inequalities, Dept. Math. Stat., University of Jyväskylä, Preprint 257 (2002), 1-32.

Kr *Кругликов В.И.* О существовании и единственности отображений, квазиконформных в среднем, с.123-147. В книге: Метрические вопросы теории функций и отображений, Киев, Наукова думка, 1973.

Ku *Куратовский К.* Топология, М., Мир, т.1 (1966) – 594с.

Le *Lehto o.* Homeomorphisms with a prescribed dilatation, Lecture Notes in Math. 118 (1968), 58-73.

LV *Lehto O. and Virtanen K.* Quasiconformal Mappings in the Plane, Springer, New York etc., 1973.

Ma *Maz'ya V.* Sobolev classes, Springer, Berlin–New York, 1985.

MRSY *Martio O., Ryazanov V., Srebro U. and Yakubov E.* On Q-homeomorphisms, Ann. Acad. Sci. Fenn., Math., 30, no.1 (2005), P.49-69.

MV_1 *Manfredi J.J. and Villamor E.* Mappings with integrable dilatation in higher dimensions, Bull. Amer. Math. Soc. 32, no.2 (1995), 235-240.

MV_2 *Manfredi J.J. and Villamor E.* An extension of Reshetnyak's theorem, Indiana Univ. Math. J. 47, no.3 (1998), 1131-1145.

MM *Martio O. and Miklyukov V.* On existense and uniqueness of the degenerate Beltrami equation, 2003, 12 pp. Preprint of Department of Mathematics, University of Helsinki, 2001. – 247

MS *Miklyukov V. and Suvorov G.* On existense and uniqueness of quasiconformal mappings with unbounded characteristics, in the book: Investigations in the Theory of Functions of Complex Variables and its Applications, Kiev, Inst. Math., 1972

Pe *Песин И.Н.* Отображения, квазиконформные в среднем, ДАН СССР, 187, no.4 (1969), 740-742.

Po *Пономарёв С.П.* $(N^{-1})-$свойство отображений и $(N)-$условие Лузина, Матем. заметки 58(1995), 411-418.

Re_1 *Решетняк Ю.Г.* Пространственные отображения с ограниченным искажением, Новосибирск: Наука (1982) – 285с.

Re_2 *Решетняк Ю.Г.* Геометрические свойства функций и отображений с обобщёнными производными, Сиб. матем. ж. 7 (1966), 886-919.

RSY_1 *V.Ryazanov, U.Srebro and E.Yakubov.* Plane mappings with dilatation dominated by functions of bounded mean oscillation, Siberian Advances in Mathematics, v.11, N2, (2001),94-130

RSY_2 *Ryazanov V., Srebro U. and Yakubov E.* Degenerate Beltrami equation and radial Q - homeomorphisms, 2003, 34p.p., Preprint of Department of Mathematics, University of Helsinki, 2003. – 369.

RS *Ryazanov V. and Sevostyanov E.* On normal families of $Q-$ homeomorphisms, Труды ИПММ НАН Украины, № 9 (2004), 171-176.

S *Севостьянов Е.А.* О теоремах сходимости отображений с конечным искажением длины, Труды ИПММ НАН Украины, 10(2005), 173-183.

Tu *Tukia P.* Compactness properties of $\mu-$homeomorphisms, Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. AI. Math. AI. 16, no.1 (1991), 47-69.

Ur *Урысон П.С.* Sur les classes $(\pounds)$ de M. Frechet, Ens. Math., 25(1926), 77-83.

Va *Vaisala J.* Lectures on n–Dimensional Quasiconformal Mappings, Lecture Notes in Math. 229, Berlin etc., Springer–Verlag, 1971.

Zi *Ziemer W.P.* Extremal length and p-capacity, Michigan Math. J. 16 (1969), 43-51.

Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк
sevostyanov@iamm.ac.donetsk.ua; sevostyanov@skif.net;
e_sevostyanov@mail.ru

Получено 27.09.2005