

Национальная академия наук Украины  
Институт прикладной математики и механики

На правах рукописи

КУРГАНСКИЙ Алексей Николаевич

НЕОТЛИЧИМОСТЬ КОНЕЧНЫХ АВТОМАТОВ,  
ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ СО СРЕДОЙ

01.01.09 – математическая кибернетика

Диссертация на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

Научные руководители:

- доктор технических наук,  
профессор Д.В.Сперанский
- кандидат физ.-мат. наук,  
с. н. с. И.С.Грунский

Донецк – 1997

# Оглавление

|                                                        |            |
|--------------------------------------------------------|------------|
| <b>Введение</b>                                        | <b>2</b>   |
| <b>1 Автоматы, взаимодействующие со средой</b>         | <b>18</b>  |
| 1.1 Взаимодействие автомата и среды . . . . .          | 18         |
| 1.2 Ограничения на поведение автомата, вводимые средой | 25         |
| 1.3 Неотличимость автоматов относительно среды . . .   | 32         |
| 1.4 Эффективность сред . . . . .                       | 44         |
| <b>2 Преобразования эффективных сред</b>               | <b>49</b>  |
| 2.1 Преобразование функций среды . . . . .             | 49         |
| 2.2 Общее преобразование вершин среды . . . . .        | 52         |
| 2.3 Одномерное преобразование вершин среды . . . . .   | 56         |
| 2.4 Двумерное преобразование вершин среды . . . . .    | 65         |
| <b>3 Эффективные и неэффективные среды</b>             | <b>70</b>  |
| 3.1 Ленты . . . . .                                    | 70         |
| 3.2 Одномерные квазиленты . . . . .                    | 79         |
| 3.3 Двумерные квазиленты . . . . .                     | 85         |
| 3.4 Неэффективная среда — класс прямоугольников . .    | 92         |
| <b>Литература</b>                                      | <b>100</b> |

## Введение

Конечные автоматы являются одним из главных объектов математической кибернетики. Они возникли как модели преобразователей дискретной информации, т.е. как модели взаимодействующие со средой — источником и получателем этой информации [16]. Автоматы в лабиринте [17], модель ЭВМ в виде взаимодействующих управляющего автомата и операционной среды [5], схема автоматов с выделенной компонентой [15], автоматы, взаимодействующие через каналы связи [31] и, наконец, машины Тьюринга являются примерами такого взаимодействия.

Задача сравнения автоматов по поведению — одна из основных в теории автоматов. В случае, когда в качестве среды выступает экспериментатор, она в основном решена Муром [23]. Им рассматривалась задача сравнения автоматов простыми и кратными экспериментами. Более тонкое изучение неотличимости экспериментами проведено в [10]. Однако в модели автомат-среда до сих пор изучалось в основном то, что может сделать автомат, и о проблеме неотличимости автоматов в среде известно не много. В работе [8] рассматривалась задача неотличимости автоматов по вход-выходным словам, порождаемым ими при взаимодействии с геометрическими средами без дыр: прямоугольниками фиксированной высоты, неограниченной высоты и их композициями. Доказано, что множества вход-выходных слов, порождаемых автоматами при взаимодействии с этими средами, является, в общем случае, контекстно-чувствительными языками, т.е. задача неотли-

чимости оказывается принципиально трудной и, возможно, алгоритмически неразрешимой. Для прямоугольников фиксированной высоты показано, что она разрешима.

В настоящей работе впервые введено отношение неотличимости автоматов по вход-выходным словам, вырабатываемым ими при взаимодействии с одной и той же средой. При этом в качестве среды выбран детерминированный, возможно, бесконечный и частичный автомат Мура. К такой модели среды сводятся многие ситуации и, в том числе, приведенные выше. Введенное отношение исследовалось в качественном и алгоритмическом аспектах. Качественный аспект рассмотрен по аналогии с подходами в [10,23]. Для исследования алгоритмической разрешимости проблемы неотличимости разработаны оригинальные методы.

Целью работы является исследование дескриптивных и алгоритмических аспектов проблемы неотличимости автоматов, взаимодействующих с одной и той же средой: исследование свойств ограничений, вводимых средой; свойств ограниченного поведения автоматов; свойства класса автоматов, неотличимых относительно среды; исследование алгоритмической разрешимости проверки неотличимости автоматов.

Методологическую основу работы составляют методы теории графов, автоматов, формальных языков и алгоритмов.

В работе полностью охарактеризованы ограничения на множество вход-выходных слов автомата, вводимые средой, а именно:

– найдены критерии (необходимые и достаточные условия), когда произвольное множество слов является ограничением, порождаемым некоторой средой.

Исследованы качественные свойства класса автоматов неотличимых относительно одной и той же среды, а именно:

– получены критерии его бесконечности, конечности и одно-

элементности;

- дан критерий минимальности автомата в классе неотличимости.

При исследовании алгоритмической разрешимости проблемы неотличимости автоматов в среде получены следующие результаты:

- введено преобразование сред и найдены достаточные условия, при которых это преобразование переводит эффективную среду (т.е. среду, относительно которой проблема проверки неотличимости автоматов алгоритмически разрешима) в эффективную; это преобразование, в частности, охватывает композицию прямоугольных сред в [8];

- предложен метод задания некоторых сред формулами в виде формальных языков; для таких сред найден критерий эффективности и найдены достаточные условия конструктивной проверки этого критерия; в частности, если формула среды представляет собой контекстно-свободный язык, то среда — эффективная;

- с помощью вышеуказанного преобразования, примененного к средам, задаваемым формулами, доказана эффективность различных классов  $n$ -мерных геометрических сред с дырами и без дыр; среди них есть классы 2-мерных геометрических сред как неограниченных по одной координате, так и неограниченных по всем координатам; в частности, новым методом доказана эффективность прямоугольников фиксированной высоты без дыр, рассмотренных в [8];

- найдены неэффективные классы прямоугольников;

- доказано, что всякий класс геометрических сред, содержащий неэффективный подкласс прямоугольников, неэффективен.

Заметим, что преобразование сред представляется мощным средством, позволяющим решать различные задачи теории автоматов.

Найденные эффективные среды представляют интерес также с точки зрения теории формальных языков, поскольку описывают частный случай контекстно-чувствительных языков, для которых, в отличие от общего случая, проблема их равенства алгоритмически разрешима.

Работа носит теоретический характер, однако полученные в ней результаты могут иметь прикладное значение в силу тесной связи задач взаимодействия автоматов с геометрическими средами с задачами автоматного анализа изображений, графов, формальных языков и других дискретных систем [17].

Диссертация состоит из введения, трех глав и списка литературы.

В первой главе рассматриваются дескриптивные аспекты поведения взаимодействующих автомата и среды. Рассматриваются свойства: неограниченного во времени взаимодействия; ограничений, накладываемых средой на поведение автомата; отношения неотличимости автоматов, взаимодействующих с одной и той же средой. Основное внимание уделяется качественным свойствам взаимодействия.

В разделе 1.1 введены основные понятия. Под автоматом  $A = (S_A, X, Y, \delta_A, \lambda_A)$  понимается конечный детерминированный всюду определенный приведенный автомат Мили, где  $S_A, X, Y$  — множества состояний, входных и выходных символов соответственно,  $\delta_A, \lambda_A$  — функции переходов и выходов соответственно. Через  $\lambda_{As}$  обозначается множество всех вход-выходных слов, порожденных состоянием  $s$  автомата, а через  $\lambda_{As}^i$  — сужение этого множества на слова длины  $i$ .

Под средой понимается произвольный детерминированный,

возможно, бесконечный и частичный автомат Мура

$$E = (R_E, U, V, \delta_E, \lambda_E),$$

где  $R_E$  — множество его состояний (вершин среды),  $U$  — входной алфавит,  $V$  — выходной алфавит (отметки вершин). В  $\lambda_E(r, u)$  переменная  $u$  фиктивна, что позволяет применять запись  $\lambda_E(r)$ . Данное определение среды позволяет охватить широкий спектр сред (лента машины Тьюринга, геометрическая среда [17], операционная среда [5], часть схемы [15] и т.п.). Пусть  $\Xi_v(E)$  — множество всех таких пар  $(v, u) \in V \times U$ , что для всех  $r \in R_E$  с отметкой  $v$  значение  $\delta_E(r, u)$  определено. Тогда  $\Xi(E) = \bigcup_{v \in V} \Xi_v(E)$ .

Далее множества состояний автоматов всегда обозначаются символом  $S$  с нижним индексом — именем автомата, а множество вершин сред — символом  $R$  с нижним индексом — именем среды.

Автомат и среда взаимодействуют между собой так, что выходной сигнал каждого из них совпадает с входным сигналом другого в каждый момент времени. Взаимодействие определяет автономный автомат Мили  $AE = (S_A \times R_E, z, V \times Y, \delta_{AE}, \lambda_{AE})$ , где  $z$  — единственный входной сигнал, а

$$\delta_{AE}((s, r), z) = (\delta_A(s, \lambda_E(r)), \delta_E(r, \lambda_A(s, \lambda_E(r))))),$$

$$\lambda_{AE}((s, r), z) = (\lambda_E(r), \lambda_A(s, \lambda_E(r))).$$

Пары  $[s, r]$ , где  $s \in S_A$ ,  $r \in R_E$ , называются конфигурациями автомата  $A$  и среды  $E$ . Конфигурация  $[s, r]$  называется тупиком, если одно из значений  $\delta_{AE}((s, r), z)$  или  $\lambda_{AE}((s, r), z)$  не определено. Траекторией длины  $i$  взаимодействия автомата  $A$  и среды  $E$ , начинающейся конфигурацией  $[s, r]$ , называется последовательность  $\text{Tr} = [s_1, r_1][s_2, r_2] \dots [s_i, r_i]$ , где  $[s_1, r_1] = [s, r]$  и  $\delta_{AE}((s_j, r_j), z) = (s_{j+1}, r_{j+1})$ ,  $1 \leq j < i$ . Траектория  $\text{Tr}$  заканчивается конфигурацией  $[s_i, r_i]$ .

Автомат  $A$  и среда  $E$  называются совместимыми, если автомат  $AE$  всюду определен. Критерий совместимости без труда следует из определения и сформулирован в теореме 1.1.1. Для совместимых автомата и среды не ограничивая общности полагаем, что входной и выходной алфавиты среды совпадают с выходным и входным алфавитами автомата соответственно. Среда названа правильной, если существует совместимый с ней автомат. Легко показать, что среда правильна в том и только том случае, если ее функция  $\lambda_E$  всюду определена и  $\Xi_x(E)$  не пусто для каждой отметки ее вершин  $x$  (следствие 1.1.1).

Раздел 1.2 посвящен характеристизации ограничений вводимых средой на множество вход-выходных слов, взаимодействующего с ней автомата.

Зафиксируем правильную среду  $E$ . Для совместимого с ней автомата  $A$  и состояния  $s \in S_A$  определим множество  $\mu_{AsE}$  всех вход-выходных слов конечной длины, порождаемых состоянием  $s$  при взаимодействии автомата и среды, т.е.  $\mu_{AsE} = \bigcup \lambda_{AE}((s, r), z^i)$ , где объединение выполняется по всем  $r \in R_E$  и натуральным  $i \geq 0$ . Обозначим через  $L(E)$  множество всех слов  $(x_1, y_1) \dots (x_i, y_i)$  в алфавите  $\Xi(E)$  таких, что для некоторой вершины  $r$  среды  $\lambda_E(r, y_1 \dots y_i) = x_1 \dots x_i$ . Множество  $L(E)$  названо ограничением, порожденным средой  $E$ . Показано, что для автомата  $A$ , совместимого с правильной средой  $E$ , выполняется равенство  $\mu_{AsE} = \lambda_{As} \cap L(E)$ , где  $s \in S_A$  (теорема 1.2.1). Далее сформулирован критерий того, что произвольное множество слов  $L$  является ограничением, порожденным некоторой средой (теорема 1.2.2). Показано, что для этого необходимо и достаточно, чтобы оно обладало следующими свойствами:

1.  $L_i = L_{i+1}|_i$ ;
2. если  $w(x, y) \in L$ , где  $w \in \Xi^*$ ,  $(x, y) \in \Xi$ , то  $w(x, y') \subseteq L$

для всех  $(x, y') \in \Xi$ ;

3.  $(x, y) \setminus L \subseteq L$  для всех  $(x, y) \in \Xi$ ,

где  $\Xi = L_1$ ,  $L_i$  — множество всех слов из  $L$  длины  $i$ ,  $L_{i+1}|_i$  — множество всех начальных отрезков длины  $i$  слов из  $L_{i+1}$ ,  $(x, y) \setminus L$  — множество всех слов  $w \in \Xi^*$  таких, что  $(x, y)w \in L$ . В работе также найден критерий того, что  $L$  является ограничением, порожденным некоторой средой, выраженный через свойства множеств вход-выходных слов, порождаемых автоматами при этом ограничении (теорема 1.2.3).

В разделе 1.3 исследованы качественные свойства отношения неотличимости автоматов относительно одной и той же среды. Получены критерии бесконечности, конечности и одноэлементности класса неотличимых автоматов. Найдено принципиальное отличие свойств поведения автоматов, ограниченных и не ограниченных средой.

Пусть  $A$  и  $B$  совместимы с  $E$ . Обозначим через  $D_{AE}^i$  и  $D_{AE}$  множества  $\{\mu_{AsE}^i\}_{s \in S_A}$  и  $\{\mu_{AsE}\}_{s \in S_A}$  соответственно. Состояния  $s \in S_A$  и  $t \in S_B$  называются  $i$ -неотличимыми (неотличимыми) относительно  $E$ , если  $\mu_{AsE}^i = \mu_{BtE}^i$  ( $\mu_{AsE} = \mu_{BtE}$ ). Автоматы  $A$  и  $B$  —  $i$ -неотличимы (неотличимы) относительно  $E$ , если  $D_{AE}^i = D_{BE}^i$  ( $D_{AE} = D_{BE}$ ). Отношение  $i$ -неотличимости (неотличимости) автоматов относительно  $E$  обозначим через  $\beta_E^i$  ( $\beta_E$ ). При исследовании отношения  $\beta_E^i$  в работе использована методика, разработанная в [10]. Она заключается в том, что исследуемое отношение между автоматами  $A$  и  $B$  сводится к хорошо известному отношению (например, эквивалентности) между автоматами-характеризаторами  $\chi(A)$  и  $\chi(B)$  производными от  $A$  и  $B$ .

Поставим в соответствие автомату  $A$  и заданному  $i$  конечный, возможно, недетерминированный автомат-характеризатор  $\chi_E^i(A) = (D_{AE}^i, X, Y, \Delta_{AE}, \Lambda_{AE})$ , множество состояний которого

равно  $D_{AE}^i$ . Функция выходов  $\Lambda_{AE}$  характеризатора определяется соотношением  $\Lambda_A(\mu_{AsE}^i, x) = \lambda_A(s, x)$ , а функция переходов  $\Delta_{AE}$  — соотношением  $\Delta_A(\mu_{AsE}^i, x) = \{\mu_{AtE}^i | (x, y) \setminus \mu_{AsE}^i \leq \mu_{AtE}^i\}$ , где  $y = \lambda_A(s, x)$ . Показано, что автоматы  $A$  и  $B$   $i$ -неотличимы относительно среды  $E$  в том и только том случае, если характеризаторы  $\chi_E^i(A)$  и  $\chi_E^i(B)$  изоморфны (следствие 1.3.1). Далее рассмотрена задача анализа: по  $A$  и  $i$  построить характеризатор  $\chi_E^i(A)$ , и обратная ей задача синтеза автомата  $B \in \beta_E^i(A)$  по заданному  $i$  и характеризатору  $\chi_E^i(A)$ . Доказано, что если  $L(E)$  — рекурсивное множество, то существует алгоритм решения этих задач (следствие 1.3.3).

Далее найдены условия минимальности автомата  $A$  в классе  $\beta_E^i(A)$  (теорема 1.3.1).

Теорема 1.3.2 и следствие 1.3.4 оценивают мощность класса  $i$ -неотличимости. Ядром класса  $\beta_E^i(A)$  назван наибольший (по числу состояний) автомат, изоморфно вложимый во все автоматы класса. Тогда класс  $\beta_E^i(A)$  бесконечен в том и только том случае, если в характеризаторе  $\chi_E^i(A)$  вне ядра существует цикл. Если же характеризатор совпадает с ядром, то класс состоит из одного автомата.

Для отношения  $\beta_E(A)$  неотличимости автоматов получены утверждения (теоремы 1.3.4–1.3.6, следствие 1.3.6) аналогичные следствию 1.3.1, теоремам 1.3.1, 1.3.2 и следствию 1.3.4. Исключение составляет задача анализа, которая, как показано ниже, для  $\beta_E$  в общем случае алгоритмически неразрешима.

Все формулировки утверждений о свойствах классов  $i$ -неотличимых автоматов практически дословно совпадают с формулировками аналогичных утверждений из [10] и являются обобщениями последних. Такое обобщение представляется нетривиальным, поскольку охватывает поведение автоматов, взаимодействующих с

тривиальными средами, т.е. такими, что всегда  $\mu_{AsE} = \lambda_{As}$  (они рассмотрены в [10]) и нетривиальными средами. Теоремы о мощности класса  $\beta_E(A)$  для тривиальных сред вырождаются, т.к. в [10] показано, что для тривиальной среды класс  $\beta_E(A)$  всегда состоит из одного  $A$ . Для нетривиальных сред показано, что это не так (теорема 1.3.7).

Оставшаяся часть работы посвящена построению сред, для которых существует алгоритм проверки неотличимости автоматов, взаимодействующих с этими средами.

В разделе 1.4 вводятся подходящие для этого понятия и доказывается сводимость проблемы неотличимости к ряду других задач.

Правильная среда  $E$  называется эффективной, если существует алгоритм, который по любым двум совместимым с  $E$  автоматам и их состояниям  $s$  и  $t$  соответственно проверяет неотличимость этих состояний относительно  $E$ .

Акцептором  $A_{s_0, s_1}$  называется автомат  $A$ , в котором выделены два состояния:  $s_0$  — начальное и  $s_1$  — заключительное.  $A_{s_0, s_1}$  называется совместимым с  $E$ , если  $A$  совместим с  $E$ . Конфигурация  $[s, r]$ , где  $s \in S_A$ ,  $r \in R_E$ , акцептора  $A_{s_0, s_1}$  и среды  $E$  называется начальной (заклучительной), если  $s = s_0$  ( $s = s_1$ ). Если существует траектория взаимодействия  $A_{s_0, s_1}$  и  $E$  (необязательно совместимых), которая начинается начальной и заканчивается заключительной (тупиковой) конфигурацией, то говорится, что  $A_{s_0, s_1}$  в среде  $E$  достигает заключительного состояния (достигает тупика). Теорема 1.4.1 характеризует эффективность среды с разных точек зрения. Она показывает, что эффективность среды эквивалентна алгоритмической разрешимости проверки достижимости заключительного состояния, проверки достижимости тупика, задачи анализа. Отсюда без труда следует, что для эффективности

произвольной правильной среды  $E$  достаточно, чтобы язык  $L(E)$  был контекстно-свободным (следствие 1.4.1).

Главы 2 и 3 посвящены построению эффективных сред.

В главе 2 введены преобразования сред, позволяющие строить из простых эффективных сред более сложные. Эти преобразования являются мощным средством в доказательстве эффективности различных геометрических сред (глава 3).

В разделе 2.1 вводятся необходимые понятия и описываются простейшие преобразования, которые являются вспомогательными для более сложных в последующих разделах.

Рассмотрим произвольный класс правильных сред

$$\mathcal{E} = \{E_i\}_{i \in I},$$

где  $I$  — множество индексов. Пусть среда  $E$  равна объединению сред класса  $\mathcal{E}$  (под объединением сред понимается среда, полученная объединением дуг исходных сред с предварительным переобозначением вершин так, чтобы исходные среды не имели общих вершин). Ясно, что тогда  $L(E) = \bigcup_{i \in I} L(E_i)$ . Класс сред  $\mathcal{E}$  называется эффективным (правильным), если среда  $E$  эффективна (правильна). Далее класс сред и среда, являющаяся объединением сред класса, не различаются.

Два класса сред  $\mathcal{E}'$  и  $\mathcal{E}''$  называются эквивалентными, если  $L(\mathcal{E}') = L(\mathcal{E}'')$ . Из определений следует, что любая правильная среда, эквивалентная эффективной, также является эффективной (следствие 2.1.1) и что любой правильный класс эффективных сред является эффективным (следствие 2.1.2).

Далее в разделе введено два преобразования сред. Первое заключается в удалении из исходной среды некоторого множества дуг. Второе заключается в переименовании отметок вершин исходной среды с возможным отождествлением некоторых из них.

Показано, что эти два преобразования сохраняют эффективность (теоремы 2.1.1 и 2.1.2).

В разделе 2.2 вводится преобразование вершин сред. Исследование этого преобразования проводится в последующих разделах, где найдены достаточные условия, при которых оно сохраняет эффективность.

Для преобразования необходимо задать пять объектов  $E, \mathcal{F}, \Delta, \mathcal{P}, I$ : 1)  $E$  является исходной средой (классом сред) с входным алфавитом  $Y$  и выходным  $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ ; 2)  $\mathcal{F}$  представляет собой множество  $\{\mathcal{F}(i)\}_{1 \leq i \leq n}$  классов сред  $\mathcal{F}(i) = \{F_k(i)\}_{k \in I(i)}$  с входным алфавитом  $Q$  и выходным  $P$ , где  $I(i)$  — множество индексов,  $1 \leq i \leq n$ ,  $Q \cap Y = \emptyset$ ; 3)  $I$  — это произвольное подмножество упорядоченных наборов индексов из  $I(1) \times \dots \times I(n)$ ; 4)  $\mathcal{P} = \{P(i)\}_{1 \leq i \leq n}$ , где  $P(i)$  — произвольное подмножество отметок из  $P$  такое, что для любого  $p \in P(i)$  в каждой среде из  $\mathcal{F}(i)$  существует единственная вершина с отметкой  $p$  (эта вершина называется тем же именем  $p$ ); 5)  $\Delta = \{\delta_{ij}\}_{1 \leq i, j \leq n}$ , где  $\delta_{ij}$  — произвольная всюду определенная функция из  $P(i) \times Y$  в  $P(j)$ ,  $1 \leq i, j \leq n$ .

Преобразование проводится отдельно для каждого набора  $e \in I$ . При этом преобразованная среда обозначается через  $J_e = (R_{J_e}, Q \cup Y, P, \delta_{J_e}, \lambda_{J_e})$ . Полностью выполненное преобразование определяет класс сред  $J = \{J_e\}_{e \in I}$ .

Пусть  $e = (k_1, \dots, k_n)$  (с целью упрощения дальнейших обозначений среда  $F_{k_i}(i)$  обозначается через  $F_e(i)$ ,  $1 \leq i \leq n$ ). Тогда в среде  $E$  каждая ее вершина  $r_E \in R_E$  заменяется множеством вершин среды  $F_e(i) = F_{k_i}(i) \in \mathcal{F}(i)$ , где  $i$  такое, что  $x_i = \lambda_E(r_E)$ , т.е.  $R_{J_e} = \bigcup_{r_E \in R_E} R_{F_e(i)} \times r_E$ , где  $\lambda_E(r_E) = x_i$ .

Далее по следующим формулам на новом множестве вершин определяются функции выходов  $\lambda_{J_e}$  и переходов  $\delta_{J_e}$ . Пусть

$(r, r_E) \in R_{J_e}$  и вершина  $r_E$  имеет отметку  $x_i$ , тогда 1)  $\lambda_{J_e}(r, r_E) = \lambda_{F_e(i)}(r)$ , и 2)  $\delta_{J_e}((r, r_E), y)$  равно  $(\delta_{F_e(i)}(r, y), r_E)$ , если  $y \in Q$ , и равно  $(\delta_{ij}(r, y), \delta_E(r_E, y))$ , если  $y \in Y$ , где  $j$  такое, что  $x_j$  является отметкой вершины  $\delta_E(r_E, y)$ . Если правая часть в последней формуле не определена, то не определена и левая часть.

Далее, в зависимости от того, является ли  $I$  одноэлементным, конечным или счетным множеством, указанное преобразование названо соответственно одномерным, объединением одномерных и двумерным преобразованием.

Раздел 2.3 посвящен первым двум преобразованиям. Доказано, что они всегда переводят эффективную среду в эффективную (следствия 2.3.2 и 2.3.3). Доказательства этих утверждений технически сложно и заключается в том, что по произвольному акцептору, совместимому с  $J$ , строится класс акцепторов  $\mathcal{B}$ , совместимых с  $E$  и таких, что первый акцептор при взаимодействии со средой  $J$  достигнет заключительного состояния в том и только том случае, если хотя бы один акцептор из  $\mathcal{B}$  достигнет заключительного состояния при взаимодействии с  $E$ .

В разделе 2.4 рассмотрено двумерное преобразование. Найдено достаточное условие (теорема 2.4.1), при котором преобразование переводит эффективную среду в эффективную. Результат используется в разделе 3.3, где рассмотрен частный случай данного преобразования, когда указанное условие проверяется конструктивно.

Глава 3 посвящена построению эффективных геометрических сред. В первом разделе найден вид сред, которые можно задавать в виде специальных формул. Для этих сред, названных лентами, полностью решена задача определения их эффективности. Исследование лент проведено независимо от основных результатов предыдущей части работы. В последующих двух разделах с

помощью преобразования лент доказана эффективность различных классов  $m$ -мерных геометрических сред,  $m \geq 2$ . И, наконец, в последнем разделе приведены примеры простых, но неэффективных геометрических сред.

В разделе 3.1 предложен метод задания некоторых сред формулами в виде формальных языков. Для таких сред найден критерий эффективности и достаточные условия конструктивной проверки этого критерия.

Конечная правильная среда  $E$  называется лентой, если все ее вершины можно расположить в последовательность  $r_1 r_2 \dots r_k$  такую, что все инцидентные в графе среды вершины в последовательности стоят рядом, где  $k$  — число вершин данной среды. Зафиксируем одну из таких последовательностей  $r_1 \dots r_i \dots r_k$  вершин ленты  $E$ . Лента  $E$  называется канонической, если 1) ее входной алфавит содержит не более трех символов, например,  $\{-1, +1, 0\}$ , и 2) если значения  $\delta_E(r_i, -1)$ ,  $\delta_E(r_i, +1)$ ,  $\delta_E(r_i, 0)$  определены, то они равны  $r_{i-1}$ ,  $r_{i+1}$ ,  $r_i$  соответственно,  $1 \leq i \leq k$ . Формулой канонической ленты  $E$  называется слово  $\lambda_E(r_1) \lambda_E(r_2) \dots \lambda_E(r_k)$ . Формулой  $\Phi(\mathcal{E})$  правильного класса канонических лент  $\mathcal{E}$  называется множество формул всех лент  $E \in \mathcal{E}$ . Путем сведения акцепторов, взаимодействующих с  $\mathcal{E}$ , к машинам Тьюринга без записывающей головки, доказано, что произвольный класс канонических лент  $\mathcal{E}$  эффективен в том и только том случае, если существует алгоритм, который для любого регулярного языка  $M$  проверяет пустоту множества  $M \cap \Phi(\mathcal{E})$  (следствие 3.1.3) Таким образом полностью решена задача проверки эффективности классов канонических лент. В частности, из утверждения следует, что ленты, заданные формулами в виде контекстно-свободных языков, эффективны.

В разделе 3.2 применен метод одномерного преобразования

лент при исследовании геометрических сред.

Пусть  $Z^m$  —  $m$ -мерное целочисленное пространство. Обозначим через  $e_i^m$   $m$ -мерный вектор, у которого  $i$ -ая компонента равна 1, все остальные равны 0,  $1 \leq i \leq m$ . Тогда  $m$ -мерной геометрической средой называется среда  $G$  с множеством вершин  $R_G \subseteq Z^m$ , входным алфавитом  $Q = \{-e_i^m, +e_i^m\}_{1 \leq i \leq m}$  и алфавитом отметок вершин таких, что отметка каждой вершины  $r \in R_G$  взаимнооднозначно указывает на то, какие из вершин  $r + d$  принадлежат  $R_G$ , где  $d \in Q$ . При этом, если  $r + d \in R_G$ , то  $\delta_G(r, d) = r + d$ .

Размер произвольного класса  $\mathcal{G}$   $m$ -мерных геометрических сред называется ограниченным в  $i$ -ой координате числом  $h$ , если для всех  $G \in \mathcal{G}$  и  $(z'_1, \dots, z'_i, \dots, z'_m), (z''_1, \dots, z''_i, \dots, z''_m) \in R_G$  имеем  $|z'_i - z''_i| \leq h$ . Пусть  $T(h) = \{0, 1, \dots, h\}$ ,  $h \in Z$ ,  $h \geq 0$ ,  $T(h_1, \dots, h_m) = T(h_1) \times \dots \times T(h_m)$ . Тогда среда с множеством вершин  $T(h_1, \dots, h_m)$  называется  $m$ -мерным прямоугольником с размерами  $h_1, \dots, h_m$  по координатам  $1, \dots, m$  соответственно.

Далее установлено, что эффективными являются, например, класс всех  $m$ -мерных геометрических сред, ограниченных по произвольным  $m - 1$  координатам, и класс всех  $m$ -мерных прямоугольников с фиксированными размерами по произвольным  $m - 1$  координатам (следствия 3.2.1 и 3.2.2). Доказательства этих утверждений проведены путем одномерного преобразования лент, заданных формулами в виде регулярных языков.

Раздел 3.3 является продолжением раздела 2.4. Благодаря удобному представлению классов лент в виде формул, появилась возможность описать частный случай двумерного преобразования сред (необязательно лент), при котором эффективность результирующей среды следует из эффективности исходной — как и в случае одномерного преобразования. Цель данного раздела построить эффективный класс геометрических сред, доказательство эффек-

тивности которого средствами одномерного преобразования лент невозможно.

Предварительно в разделе было показано, что среда  $J$  является эффективной, если она может быть получена двумерным преобразованием эффективной среды  $E$  по заданным  $\mathcal{F}$ ,  $\mathcal{P}$ ,  $\Delta$ ,  $I$ , при котором  $\mathcal{F}$  представляет собой множество классов лент, заданных регулярными формулами, и язык  $\pi(I)$  является регулярным (теорема 3.3.1). В утверждении принято, что индексом ленты является ее формула, а язык  $\pi(I)$  получается из множества  $I$  специальным преобразованием, выравнивающим длины слов в каждом наборе  $(k_1, \dots, k_n) \in I$ .

С помощью указанного преобразования в разделе доказана эффективность класса геометрических сред  $\mathcal{H}$ , каждая среда  $H_{k,l}$  которого задается парой целых чисел  $k$ ,  $l$ , где  $k \geq 3$  и является нечетным числом,  $l \geq 2$ . При этом точка  $(z_1, z_2)$  является вершиной среды  $H_{k,l}$ , если 1)  $1 \leq z_1 \leq k$ ,  $1 \leq z_2 \leq l$ , 2)  $z_1$  — нечетное число, либо, если  $z_1$  — четное, то  $z_2 = 1$  или  $z_2 = l$ . Таким образом, найден эффективный класс геометрических сред, содержащий среды со сколь угодно большими размерами по обоим координатам.

В разделе 3.4 приведен ряд примеров неэффективных геометрических сред, доказательства неэффективности которых основано на сведениях взаимодействующих с ними акцепторов к счетчиковым машинам Тьюринга [22]. В частности, доказана неэффективность произвольного класса 2-мерных прямоугольников такого, что для любого сколь угодно большого числа в нем найдется прямоугольник с размерами, превышающими это число (следствие 3.4.2). Кроме того доказано, что всякий класс геометрических сред, содержащий неэффективный подкласс прямоугольников, является неэффективным. Из этого утверждения следуют критерии эффективности некоторых сред, например: класс всевозможных  $m$ -

мерных геометрических сред с ограниченными размерами по координатам из заданного списка эффективен в том и только том случае, если список содержит не менее чем  $m - 1$  координат (следствие 3.4.6).

Результаты, содержащиеся в диссертации, получены автором в Институте прикладной математики и механики НАН Украины, опубликованы в работах автора [11,12,19,20], докладывались на школе-семинаре "Интеллектуальные системы" (Красновидово,1993), на II Украинской конференции по автоматическому управлению "Автоматика-95" (Львов,1995), на XI Международной конференции по проблемам теоретической кибернетики (Ульяновск,1996), на международной конференции "Интеллектуальные системы и компьютерные науки" (Москва,1996), на семинарах по теории управляющих систем ИПММ НАН Украины, в Саратовском и Донецком университетах.

## Глава 1

# Автоматы, взаимодействующие со средой

В данной главе рассматриваются дескриптивные аспекты поведения взаимодействующих автомата и среды. Рассматриваются свойства: неограниченного по времени взаимодействия; ограничений, вводимых средой на взаимодействующие с ней автоматы; отношения неотличимости автоматов, взаимодействующих с одной и той же средой. Основное внимание уделяется качественным свойствам взаимодействия. Алгоритмическим вопросам неотличимости автоматов посвящены главы 2,3.

### 1.1 Взаимодействие автомата и среды

В данном разделе вводятся основные понятия и обозначения. Неопределяемые понятия общепотребительны и их можно найти в [5,10,16]. В разделе найден критерий (необходимые и достаточные условия), при котором взаимодействие автомата и среды осуществляется не ограничено во времени (без тупиков).

Пусть  $A = (S_A, X, Y, \delta_A, \lambda_A)$  — конечный детерминированный всюду определенный автомат Мили, у которого  $S_A, X, Y$  — множества состояний, входных и выходных символов соответственно,  $\delta_A$  — функция переходов, отображающая множество  $S_A \times X$  во

множество  $S_A$ , а  $\lambda_A$  — функция выходов, отображающая  $S_A \times X$  на множество  $Y$ . Через  $X^*$  обозначим множество всех конечных слов в алфавите  $X$ , включая пустое слово  $e$ . Функции переходов и выходов обычным образом расширяются на множество  $S \times X^*$  по следующим формулам. Пусть  $x \in X$  и  $p \in X^*$ , тогда:

$$\delta_A(s, e) = s, \quad \delta_A(s, xp) = \delta_A(\delta_A(s, x), p),$$

$$\lambda_A(s, e) = e, \quad \lambda_A(s, xp) = \lambda_A(s, x) \cdot \lambda_A(\delta_A(s, x), p).$$

Таким образом, если  $p = x_1x_2 \dots x_i$  — входное слово, то через  $\delta_A(s, p)$  обозначается состояние, в которое автомат переходит из состояния  $s$  под действием  $p$ , а через  $\lambda_A(s, p)$  — соответствующее выходное слово длины  $i$ . Слово  $(x_1, y_1) \dots (x_i, y_i)$  в алфавите  $X \times Y$ , где  $y_1 \dots y_i = \lambda_A(s, x_1 \dots x_i)$ , назовем вход-выходным словом, порожденным состоянием  $s$ . Множество всех вход-выходных слов конечной длины, порождаемых состоянием  $s$ , обозначим через  $\lambda_{As}$ . Подмножество всех слов из  $\lambda_{As}$  длины  $i$  обозначим через  $\lambda_{As}^i$ . Через  $\Phi_A^i$  обозначим множество слов  $\cup \lambda_{As}^i$ , где объединение выполняется по всем  $s \in S$ . Состояния  $s$  и  $t$  из  $S$  называются эквивалентными, если  $\lambda_{As} = \lambda_{At}$ . Пусть выделено некоторое подмножество  $W$  символов из алфавита  $X \times Y$ . Тогда через  $\mathcal{A}(X, Y; W)$  будет обозначаться класс всех всюду определенных детерминированных автоматов  $A$  с входным алфавитом  $X$ , выходным  $Y$  и таких, что  $\Phi_A^1 \subseteq W$ .

Дугой автомата  $A$  назовем произвольную четверку  $(s, x, y, t)$ , где  $s, t \in S_A$ ,  $x \in X$ ,  $y = \lambda_A(s, x)$ . Под объединением автоматов будем понимать автомат, полученный объединением дуг исходных автоматов с предварительным переобозначением состояний так, чтобы исходные автоматы не имели общих состояний.

Пусть  $W$  и  $Z$  некоторые множества слов. Тогда  $W$  и  $Z$  находятся в отношении  $W \leq Z$ , если каждое слово из  $W$  является

начальным отрезком какого-либо слова из  $Z$ . Через  $W|_i$  обозначим множество всех начальных отрезков длины  $i$  слов из  $W$ . Через  $W \cdot Z$  или  $WZ$  обозначим конкатенацию языков  $W$  и  $Z$ . Пусть  $w$  некоторое слово, тогда через  $w \setminus W$  обозначим множество всех слов  $w'$  таких, что  $ww' \in W$ .

Пусть  $E = (R_E, U, V, \delta_E, \lambda_E)$  — детерминированный, возможно, бесконечный (счетный) и частичный автомат Мура, где  $R_E, U, V$  — множества состояний, входных и выходных символов соответственно. Функции переходов  $\delta_E$  и выходов  $\lambda_E$  автомата Мура отображают, как и в случае автомата Мили, множество  $R_E \times U$  в множество  $R_E$  и на множество  $V$  соответственно. Аналогично случаю автомата Мили эти функции расширяются до словарных. Поскольку в автомате Мура значение функции  $\lambda_E(r, u)$ , где  $r \in R_E, u \in U$ , фиктивно зависит от  $u$ , то это позволяет писать  $\lambda_E(r)$  вместо  $\lambda_E(r, u)$ . Данное определение среды позволяет охватить широкий спектр сред (лента машины Тьюринга, геометрическая среда [17], операционная среда [5], часть схемы [15] и т.п.).

Далее множество состояний автомата Мили всегда будет обозначаться символом  $S$  с соответствующим нижним индексом — именем автомата, а множество вершин среды будет обозначаться символом  $R$ , также с соответствующим нижним индексом — именем среды.

Обозначения функций переходов  $\delta$  и выходов  $\lambda$  будут также сопровождаться нижним индексом — соответствующим именем автомата или среды.

Часто для выражения того, что в некотором автомате для состояния  $s$  и входного сигнала  $x$  определено значение  $t$  функции переходов  $\delta(s, x)$ , будет говориться, что из состояния  $s$  определен переход по входному сигналу  $x$ , и он ведет в состояние  $t$ , а если под автоматом подразумевается среда, то будет говориться, что

из вершины  $s$  определено движение по входному сигналу  $x$ , и оно ведет в вершину  $t$ .

Пусть автомат  $A$  и среда  $E$  взаимодействуют между собой так, что выходной сигнал каждого из них совпадает с входным сигналом другого в каждый момент времени. В результате получается автономный автомат Мили

$$AE = (S_A \times R_E, z, V \times Y, \delta_{AE}, \lambda_{AE}),$$

где  $z$  — единственный входной сигнал, а

$$\delta_{AE}((s, r), z) = (\delta_A(s, \lambda_E(r)), \delta_E(r, \lambda_A(s, \lambda_E(r))))), \quad (1.1)$$

$$\lambda_{AE}((s, r), z) = (\lambda_E(r), \lambda_A(s, \lambda_E(r))). \quad (1.2)$$

Иногда  $AE$  будет называться автоматом-взаимодействием.

**Определение 1.1.1** *Конфигурацией взаимодействующих автомата  $A$  и среды  $E$  называется произвольная пара: состояние  $s$  автомата и вершина  $r$  среды. Конфигурация обозначается в квадратных скобках  $[s, r]$ .*

Таким образом, можно сказать, что множеством состояний автомата-взаимодействия  $AE$  является множество всех конфигураций автомата  $A$  и среды  $E$ .

**Определение 1.1.2** *Траекторией длины  $i$  взаимодействия автомата  $A$  и среды  $E$  из конфигурации  $[s, r]$ , где  $s \in S_A$ ,  $r \in R_E$ , назовем такую последовательность конфигураций*

$$[s_1, r_1][s_2, r_2] \dots [s_i, r_i],$$

что  $[s_1, r_1] = [s, r]$  и  $\delta_{AE}((s_j, r_j), z) = (s_{j+1}, r_{j+1})$ ,  $1 \leq j < i$ .

Траектория длины  $i$  взаимодействия автомата  $A$  и среды  $E$  из конфигурации  $[s, r]$  будет обозначаться  $\text{Tr}_{AE}([s, r])$  или  $\text{Tr}([s, r])$ .

Последнее обозначение используется в случаях, когда ясно о взаимодействии каких автомата и среды идет речь. Множество

$$\text{Tr}_{AE}([s, r]) = \bigcup \text{Tr}_{AE}^i([s, r]),$$

где объединение выполняется по всем натуральным  $i > 0$ , будет называться просто траекторией взаимодействия  $A$  и  $E$  из конфигурации  $[s, r]$ .

Часто, если  $\delta_{AE}((s, r), z^i) = (s', r')$ , то будет говориться, что автомат  $A$  переходит за  $i$  шагов из конфигурации  $[s, r]$  в конфигурацию  $[s', r']$ .

Для траектории  $[s_1, r_1][s_2, r_2] \dots [s_i, r_i]$  будет говориться, что она начинается конфигурацией  $[s_1, r_1]$  и заканчивается конфигурацией  $[s_i, r_i]$ .

**Определение 1.1.3** Автомат  $A$  и среда  $E$  называются совместимыми, если автомат  $AE$  всюду определен.

**Определение 1.1.4** Тупиком автомата  $A$  и среды  $E$  называется любая их конфигурация  $[s, r]$  такая, что не определено значение хотя бы одной из функций  $\delta_{AE}((s, r), z)$  или  $\lambda_{AE}((s, r), z)$ .

Совместимость автомата и среды означает, что они, начиная из любой конфигурации, могут взаимодействовать не ограничено во времени, т.е. без тупиков. Таким образом, для несовместимых автомата и среды возможна ситуация, что для какой-либо конфигурации  $[s, r]$  определена траектория  $\text{Tr}^i([s, r])$  длины  $i$  и не определена траектория  $\text{Tr}^{i+1}([s, r])$  длины  $i + 1$ , поскольку  $\text{Tr}^i([s, r])$  заканчивается тупиком. В этом случае будем говорить, что траектория  $\text{Tr}([s, r])$  тупиковая, и она равна объединению всех траекторий, начинающихся  $[s, r]$ , длины меньше либо равной  $i$ .

Рассмотрим условия совместимости автомата и среды. Из определения вытекает следующее необходимое условие совмести-

мости: выходной алфавит среды должен включаться как подмножество во входной алфавит автомата и выходной алфавит автомата должен включаться во входной алфавит среды, т.е. должно быть  $V \subseteq X$  и  $Y \subseteq U$ . Пусть это необходимое условие выполняется. Если удалить из алфавитов  $X$  и  $U$  часть символов так, чтобы выполнялось  $V = X$  и  $Y = U$ , то автомат  $AE$  останется без изменений. Таким образом, далее для удобства будут рассматриваться, за исключением оговариваемых случаев, только такие взаимодействующие автомат и среда, что входной алфавит автомата совпадает с выходным алфавитом среды, а входной алфавит среды совпадает с выходным алфавитом автомата.

Введем для каждого символа  $x$  из алфавита  $X$  отметок вершин произвольной среды  $E$  множество  $\Xi_x(E)$  всех пар  $(x, y)$  из  $X \times Y$  таких, что из всех вершин среды с отметкой  $x$  определено движение по входному сигналу  $y$ . Через  $\Xi(E)$  обозначим объединение множеств  $\Xi_x(E)$  по всем  $x \in X$ . Имеет место простое, но важное в дальнейшем утверждение. Оно в неявном виде имеется в [18, с.158].

**Теорема 1.1.1** *Автомат  $A$  и среда  $E$  совместимы в том и только том случае, если одновременно выполняются следующие условия:*

1. *функция  $\lambda_E$  отметок вершин среды  $E$  всюду определена;*
2.  *$\Phi_A^1 \subseteq \Xi(E)$ , т.е.  $A \in \mathcal{A}(X, Y; \Xi(E))$ .*

**Доказательство.** Пусть автомат  $A$  и  $E$  среда совместимы. Из определения совместимости следует, что для любых  $s \in S_A$  и  $r \in R_E$  правые части в формулах (1.1), (1.2) должны быть определены и, следовательно, должны быть определены значения  $\lambda_E(r)$ . Условие 1, таким образом, выполняется. Предположим, что для некоторых  $s \in S_A$  и  $x \in X$  вход-выходной символ  $(x, \lambda_A(s, x))$  не

принадлежит  $\Xi_x(E)$ . Тогда существует такая вершина  $r \in R_E$  с меткой  $x$ , что из нее не определено движение по входному сигналу  $\lambda_A(s, x)$  или, что то же самое, не определено значение функции  $\delta_E(r, \lambda_A(s, \lambda_E(r)))$  и, следовательно, не определена правая часть в формуле (1.1), что противоречит определению совместимости автомата и среды. Необходимость условий доказана.

Докажем достаточность. Пусть функция  $\lambda_E$  всюду определена. Тогда, поскольку автомат всюду определен, то для любых  $s \in S_A$  и  $r \in R_E$  определены следующие значения функций:  $\delta_A(s, \lambda_E(r))$ ,  $\lambda_E(r)$ ,  $\lambda_A(s, \lambda_E(r))$ . Пусть выполняется условие  $\Phi_A^1 \subseteq \Xi(E)$ . Отсюда следует, что значение функции  $\delta_E(r, \lambda_A(s, \lambda_E(r)))$  определено для всех  $s \in S_A$ ,  $r \in R_E$ . Таким образом показано, что правые части в формулах (1.1), (1.2) определены и, следовательно, автомат  $AE$  всюду определен.

Теорема доказана.

**Определение 1.1.5** *Среда называется правильной, если существует совместимый с ней автомат.*

**Следствие 1.1.1** *Среда  $E$  является правильной в том и только том случае, если ее функция  $\lambda_E$  всюду определена и множество  $\Xi_x(E)$  не пусто для всех  $x \in X$ .*

**Доказательство.** Пусть  $E$  — правильная среда, и  $A$  — автомат, совместимый с  $E$ . Тогда по теореме 1.1.1 функция  $\lambda_E$  всюду определена и  $\Phi_A^1 \subseteq \Xi(E)$ . Поскольку  $A$  всюду определен, то  $\Xi_x(E)$  не пусто для любого  $x$  из входного алфавита автомата  $A$ . Необходимость условий доказана.

Докажем достаточность. Сделаем это построением соответствующего автомата. Пусть функция  $\lambda_E$  всюду определена и множество  $\Xi_x(E)$  непусто для любого  $x \in X$ . Для каждого  $x \in X$

выберем произвольное  $y_x$  такое, что  $(x, y_x) \in \Xi_x(E)$ . Пусть автомат  $A$  имеет только одно состояние  $s$ . Полагаем, что  $\lambda_A(s, x) = y_x$  для всех  $x \in X$ . По построению  $\Phi_A^1 \subseteq \Xi(E)$ . Следовательно, по теореме 1.1.1 автомат  $A$  и среда  $E$  совместимы.

Следствие доказано.

## 1.2 Ограничения на поведение автомата, вводимые средой

В данном разделе исследуются свойства ограничений, накладываемых произвольной правильной средой на множество вход-выходных слов, порождаемых автоматом при взаимодействии с этой средой. Найдено полное описание таких ограничений (теорема 1.2.2) и описание ограниченного поведения автоматов (теорема 1.2.3).

Зафиксируем правильную среду  $E$ . Для совместимого с ней автомата  $A$  и произвольного его состояния  $s$  определим множество  $\mu_{AsE}$  всех вход-выходных слов конечной длины, порождаемых состоянием  $s$  при взаимодействии автомата и среды, т.е.  $w = (x_1, y_1) \dots (x_i, y_i) \in \mu_{AsE}$ , если  $w = \lambda_{AE}((s, r), z^i)$  для некоторой вершины  $r$  среды. Подмножество всех слов из  $\mu_{AsE}$ , имеющих длину  $i$ , обозначим через  $\mu_{AsE}^i$ .

Среду  $E$  назовем нетривиальной, если найдутся автомат  $A$  и его состояние  $s$  такие, что  $\mu_{AsE} \neq \lambda_{As}$ . Ясно, что нетривиальные среды существуют.

Введем удобную в дальнейшем характеристику  $L(E)$  произвольной среды  $E$ .  $L(E)$  представляет собой множество всех слов  $w = (x_1, y_1) \dots (x_i, y_i)$  в алфавите  $\Xi(E)$  таких, что для некоторой вершины  $r$  среды  $\lambda_E(r, y_1 \dots y_i) = x_1 \dots x_i$ . Будем говорить, что слово  $w$  порождается вершиной  $r$ .

Множество  $L(E)$  назовем ограничением, порожденным средой  $E$ . Через  $L_i(E)$  обозначим подмножество всех слов из  $L(E)$  длины  $i$ . Нетрудно показать, что среда является тривиальной в том и только том случае, если  $L(E) = (\Xi(E))^*$ .

**Теорема 1.2.1** Пусть автомат  $A$  совместим со средой  $E$ , тогда  $\mu_{AsE} = \lambda_{As} \cap L(E)$  для всех  $s \in S_A$ .

**Доказательство.** Пусть  $w = (x_1, y_1) \dots (x_i, y_i)$  принадлежит  $\mu_{AsE}$ . По определению,  $w = \lambda_{AE}((s, r), z^i)$  для некоторой вершины  $r$  среды  $E$ . Поскольку автомат  $AE$  всюду определен, то из соотношений (1.1) и (1.2) вытекает, что  $w \in \lambda_{As}$  и  $\lambda_E(r, y_1 \dots y_i) = x_1 \dots x_i$ , т.е.  $w \in L(E)$ . Следовательно,  $\mu_{AsE} \subseteq \lambda_{As} \cap L(E)$ . Покажем обратное включение. Пусть  $w = (x_1, y_1) \dots (x_i, y_i)$  принадлежит  $\lambda_{As} \cap L(E)$ . Тогда, по определению  $L(E)$ , существует такая вершина  $r$  среды  $E$ , что  $\lambda_E(r, y_1 \dots y_i) = x_1 \dots x_i$ . Индукцией по длине начального отрезка слова  $w$  с учетом (1.1) и (1.2) можно показать, что  $w = \lambda_{AE}((s, r), z^i)$ . Отсюда  $w \in \mu_{AsE}$ .

Теорема доказана.

Следующая теорема дает критерий, когда произвольное множество слов  $L$  является ограничением, порожденным некоторой правильной средой. Далее через  $L_i$  обозначаем подмножество всех слов длины  $i$  из  $L$  и через  $\Xi$  обозначаем  $L_1$ .

**Теорема 1.2.2** Пусть  $L$  — произвольное множество слов в алфавите  $X \times Y$ . Тогда  $L$  является ограничением, порожденным некоторой средой в том и только том случае, если одновременно выполняются свойства:

1.  $L_i = L_{i+1}|_i$ ;
2. если  $w(x, y) \in L$ , где  $w \in \Xi^*$ ,  $(x, y) \in \Xi$ , то  $w \cdot (x, y') \subseteq L$  для всех  $(x, y') \in \Xi$ ;
3.  $(x, y) \setminus L \subseteq L$  для всех  $(x, y) \in \Xi$ .

**Доказательство.** Пусть  $L$  является ограничением, порожденным некоторой правильной средой  $E$  с входным алфавитом  $Y$  и выходным  $X$ , т.е.  $L = L(E)$  и  $\Xi = \Xi(E)$ . Покажем, что  $L$  удовлетворяет указанным свойствам 1–3.

Докажем свойство 1. Пусть  $(x_1, y_1) \dots (x_i, y_i)(x_{i+1}, y_{i+1}) \in L$ . Но тогда и  $(x_1, y_1) \dots (x_i, y_i) \in L$ , т.е.  $L_{i+1}|_i \subseteq L_i$ . Пусть теперь  $(x_1, y_1) \dots (x_i, y_i) \in L$ . Тогда существует вершина  $r$  среды такая, что  $\lambda_E(r, y_1 \dots y_i) = x_1 \dots x_i$ . Пусть  $r' = \delta_E(r, y_1 \dots y_i)$  и  $r'$  имеет отметку  $x_{i+1}$ . Тогда, для произвольного  $y_{i+1}$  такого, что  $(x_{i+1}, y_{i+1}) \in \Xi$ , имеем  $\lambda_E(r, y_1 \dots y_{i+1}) = x_1 \dots x_{i+1}$  и, следовательно,  $(x_1, y_1) \dots (x_i, y_i)(x_{i+1}, y_{i+1}) \in L$ . Отсюда  $L_i = L_{i+1}|_i$ .

Докажем свойство 2. Пусть  $(x_1, y_1) \dots (x_i, y_i)(x, y) \in L$ , т.е. существует вершина  $r$  такая, что  $\lambda_E(r, y_1 \dots y_i y) = x_1 \dots x_i x$ . Пусть  $r' = \delta_E(r, y_1 \dots y_i y)$ . Ясно, что отметка вершины  $r'$  есть  $x$ . По определению  $\Xi$ , для любого  $(x, y') \in \Xi$  определено значение функции  $\delta_E(r', x')$  и, следовательно,  $\lambda_E(r, y_1 \dots y_i y') = x_1 \dots x_i x$ . Значит,  $(x_1, y_1) \dots (x_i, y_i)(x, y') \in L$  для всех  $(x, y') \in \Xi$ .

Докажем свойство 3. Пусть  $(x_1, y_1) \dots (x_i, y_i) \in L$ , т.е. существует вершина  $r$  такая, что  $\lambda_E(r, y_1 \dots y_i) = x_1 \dots x_i$ . Пусть  $r' = \delta_E(r, y_1)$ . Тогда  $\delta_E(r', y_2 \dots y_i) = x_2 \dots x_i$ , т.е.

$$(x_2, y_2) \dots (x_i, y_i) \in L.$$

Таким образом показано, что  $(x, y) \setminus L \subseteq L$  для всех  $(x, y) \in \Xi$ .

Необходимость условий 1–3 доказана.

Докажем достаточность. Пусть  $L$  — произвольное множество слов, удовлетворяющее условиям 1–3. Определим по каждому слову  $w$  из  $L$  некоторый частичный автомат Мура (среду)  $E_w$ . Пусть  $w = (x_1, y_1) \dots (x_i, y_i)$ . Тогда множество вершин среды  $E_w$  полагаем равным множеству всех начальных отрезков слова  $w$ . Ясно, что число таких вершин равно  $i$ . Отметкой вершины, соответ-

ствующей слову  $w|_j = (x_1, y_1) \dots (x_j, y_j)$ , где  $1 \leq j \leq i$ , является символ  $x_j$ . Из вершины  $w|_j$  переход определен только по входному сигналу  $y_j$ , который ведет в вершину  $w|_{j+1}$ . Из вершины  $w|_i = w$  переход не определен по всем входным сигналам. Пусть среда  $E$  равна объединению сред  $E_w$  по всем  $w \in L$ . Ясно, что среда  $E$  пока не является правильной. Доопределим ее функцию переходов. Рассмотрим произвольную вершину  $w|_j$  среды  $E_w$ , где слово  $w$  имеет длину  $i$  и  $1 \leq j \leq i$ . Пусть эта вершина имеет отметку  $x$ . Тогда, для каждого  $y$  такого, что  $(x, y) \in \Xi$  и значение функции  $\delta_E(w|_j, y)$  не определено, полагаем  $\delta_E(w|_j, y)$  равным вершине  $u$  среды  $E_u$ , где  $u$  равно  $w|_j \cdot (x, y)$ . Слово  $u$  принадлежит  $L$  в силу условий 1 и 2. Доопределенная таким образом среда  $E$  является правильной и такой, что  $\Xi(E) = \Xi$ . Осталось доказать, что  $L(E) = L$ . Пусть  $w$  — произвольное слово из  $L$ . В силу построений, это слово порождается вершиной среды  $E$ , соответствующей вершине  $w|_1$  среды  $E_w$ . Таким образом, показано, что  $L \subseteq L(E)$ .

Покажем обратное включение. Пусть  $w$  — произвольное слово из  $L$ . Рассмотрим вершину среды  $E$ , соответствующую вершине  $w|_1$  среды  $E_w$ . В силу правила доопределения функций переходов среды  $E$ , любое слово  $w' = (x'_1, y'_1) \dots (x'_k, y'_k)$ ,  $k \geq 1$ , такое, что  $\delta_E(w|_1, y'_1 \dots y'_k)$  — определено и  $x'_1 \dots x'_k = \lambda_E(w|_1, y'_1 \dots y'_k)$ , принадлежит  $L$ . Рассмотрим теперь произвольную вершину среды  $E$ . Пусть она соответствует вершине  $w|_j$  среды  $E_w$ , где слово  $w$  имеет длину  $i$  и  $1 \leq j \leq i$ . Пусть  $w'$  — произвольное слово, которое порождает вершина  $w|_j$  среды  $E$ . Тогда вершина  $w|_1$  среды  $E$  порождает слово  $w|_j \cdot w'$ . В силу вышесказанного,  $w|_j \cdot w' \in L$ . Но тогда из условия 3 следует, что  $w' \in L$ . Таким образом,  $L(E) \subseteq L$ .

Теорема доказана.

Поскольку автомат  $A$  совместим с правильной средой  $E$  в том и только то случае, если  $A$  принадлежит классу  $\mathcal{A}(X, Y; \Xi(E))$

(теорема 1.1.1), то множество  $L$ , удовлетворяющее условиям 1–3, удобно назвать правильным ограничением класса автоматов  $\mathcal{A}(X, Y; \Xi)$ . Заметим, что если не для всякого  $x \in X$  найдется  $y \in Y$  такой, что  $(x, y) \in \Xi$ , то класс  $\mathcal{A}(X, Y; \Xi)$  должен быть пустым, поскольку он содержит только всюду определенные автоматы с входным алфавитом  $X$ . Далее, не ограничивая общности, мы рассматриваем только непустые классы автоматов  $\mathcal{A}(X, Y; \Xi)$ .

Естественно предположить, что свойства правильных ограничений отражаются на свойствах ограниченного поведения автоматов. Следующая теорема дает еще один критерий того, что множество является правильным ограничением. Этот критерий выражен через свойства множеств вход-выходных слов, порождаемых автоматами при этом ограничении.

**Теорема 1.2.3** *Множество слов  $L$  в алфавите  $X \times Y$  является правильным ограничением для непустого класса  $\mathcal{A}(X, Y; \Xi)$  в том и только том случае, если множества вход-выходных слов  $\mu_{As}(L) = \lambda_{As} \cap L$  для всех  $A \in \mathcal{A}(X, Y; \Xi)$  и  $s \in S_A$  имеют свойства:*

1.  $\mu_{As}^1(L) = \lambda_{As}^1$ ;
2.  $\mu_{As}^i(L) = \mu_{As}^{i+1}(L)|_i$ , где  $\mu_{As}^i(L)$  — множество слов длины  $i$  из  $\mu_{As}(L)$ ,  $i \geq 1$ ;
3. если для некоторого состояния  $t \in S_B$  автомата  $B \in \mathcal{A}(X, Y; \Xi)$  выполняется  $\mu_{As}(L) \subseteq \mu_{Bt}(L)$ , то  $\mu_{As}(L) = \mu_{Bt}(L)$ ;
4. если  $s, t \in S_A$ ,  $x \in X$ ,  $y \in Y$  такие, что  $t = \delta_A(s, x)$ ,  $y = \lambda_A(s, x)$ , то  $(x, y) \setminus \mu_{As}(L) \subseteq \mu_{At}(L)$ .

**Доказательство.** Свойство 1 ограниченного поведения автоматов прямо следует из определения непустого класса  $\mathcal{A}(X, Y; \Xi)$ .

Далее докажем, что свойства 1 и 3 правильных ограничений

эквивалентны соответственно свойствам 2 и 4 множеств  $\mu_{As}(L)$ , и что из свойства 2 правильных ограничений следует свойство 3 множеств  $\mu_{As}(L)$ , а из свойств 3,4 множеств  $\mu_{As}(L)$  следует свойство 2 правильных ограничений.

1. Покажем, что свойство  $L_i = L_{i+1}|_i$  эквивалентно условию  $\mu_{As}^1(L) = \mu_{As}^{i+1}(L)|_i$  для всех  $A \in \mathcal{A}(X, Y; \Xi)$ ,  $s \in S_A$ . Поскольку  $\mu_{As}^i(L)$ , то из  $L_i = L_{i+1}|_i$  следует  $\mu_{As}^i(L) = \mu_{As}^{i+1}(L)|_i$ .

Обратно, пусть  $\mu_{As}^i(L) = \mu_{As}^{i+1}(L)|_i$  для всех  $A \in \mathcal{A}(X, Y; \Xi)$ ,  $s \in S_A$ . Предположим  $L_i \neq L_{i+1}|_i$ . Пусть некоторое слово  $w$  либо принадлежит  $L_i$  и не принадлежит  $L_{i+1}|_i$ , либо наоборот  $w \in L_{i+1}|_i$  и  $w \notin L_i$ . Пусть  $w = (x_1, y_1) \dots (x_i, y_i)$ . Нетрудно построить автомат  $A \in \mathcal{A}(X, Y; \Xi)$ , имеющий состояние  $s$ , которое порождает слово  $w$ . Отсюда, в любом из случаев  $w \in L_i$  и  $w \notin L_{i+1}|_i$  или  $w \in L_{i+1}|_i$  и  $w \notin L_i$ , имеем  $\mu_{As}^i(L) \neq \mu_{As}^{i+1}(L)|_i$ . Получено противоречие.

2. Покажем, что свойство 3 правильных ограничений эквивалентно свойству 4 множеств  $\mu_{As}(L)$ . Пусть  $(x, y) \setminus L \subseteq L$  для всех  $(x, y) \in \Xi$ . Пусть состояния  $s$  и  $t$  автомата  $A \in \mathcal{A}(X, Y; \Xi)$  и символы  $x \in X$ ,  $y \in Y$  такие, что  $\delta_A(s, x) = t$ ,  $\lambda_A(s, x) = y$ . Отсюда, в силу равенства  $(x, y) \setminus \lambda_{As} = \lambda_{At}$ , имеем

$$(((x, y) \setminus \lambda_{As}) \cap ((x, y) \setminus L)) \subseteq \lambda_{At} \cap L$$

и, следовательно,  $(x, y) \setminus \mu_{As}(L) \subseteq \mu_{At}(L)$ .

Обратно, предположим свойство 4 множеств  $\mu_{As}(L)$  для всех  $A \in \mathcal{A}(X, Y; \Xi)$ ,  $s \in S_A$ , выполняется и, при этом, не выполняется свойство 3 правильных ограничений, т.е. для некоторого  $(x, y) \in \Xi$  имеем  $(x, y) \setminus L \not\subseteq L$ . Пусть  $w$  — слово, которое принадлежит  $(x, y) \setminus L$  и не принадлежит  $L$ . Отсюда  $(x, y)w \in L$ . Пусть произвольный автомат  $A \in \mathcal{A}(X, Y; \Xi)$  и его состояние  $s$  такие, что  $(x, y)w \in \lambda_{As}$ . Понятно, что такой автомат существует. Но

тогда слово  $w$  не принадлежит  $(x, y) \setminus \mu_{As}(L)$  и не принадлежит  $\mu_{At}(L)$ , где  $t = \delta_A(s, x)$ . Таким образом, получено противоречие с предположением  $(x, y) \setminus \mu_{As}(L) \subseteq \mu_{At}(L)$ .

3. Покажем, что из свойства 2 правильных ограничений следует свойство 3 множеств  $\mu_{As}(L)$ . Пусть, если  $w(x, y) \in L$ , то  $w(x, y') \in L$  для всех  $(x, y') \in \Xi$ . Предположим, что для некоторых автоматов  $A, B$  из  $\mathcal{A}(X, Y; \Xi)$  и их состояний  $s \in S_A$  и  $t \in S_B$  выполняется  $\mu_{As}(L) \subseteq \mu_{Bt}(L)$ , но при этом  $\mu_{As}(L)$  не равно  $\mu_{Bt}(L)$ . Пусть  $w = (x_1, y_1) \dots (x_i, y_i)$  — кратчайшее слово, которое принадлежит  $\mu_{Bt}(L)$  и не принадлежит  $\mu_{As}(L)$ . Но тогда  $w$  принадлежит  $L$ . Следовательно, слово

$$(x_1, y_1) \dots (x_{i-1}, y_{i-1})(x_i, y)$$

принадлежит  $L$  для всех  $(x_i, y) \in \Xi$ . В силу того, что  $A$  всюду определен, существует такое  $y'$ , что слово

$$w' = (x_1, y_1) \dots (x_{i-1}, y_{i-1})(x_i, y')$$

принадлежит  $\lambda_{As}$  и, следовательно, принадлежит  $\mu_{As}(L)$ . В силу того, что  $A$  и  $B$  детерминированы, то либо  $w'$  принадлежит  $\mu_{Bt}(L)$  и тогда  $w = w'$ , либо  $w'$  вообще не принадлежит  $\mu_{Bt}(L)$ . Первое противоречит предположению  $w \in \mu_{As}(L)$ , второе противоречит  $\mu_{As}(L) \subseteq \mu_{Bt}(L)$ .

Покажем теперь, что из свойств 2,3 множеств  $\mu_{As}(L)$  следует свойство 2 ограничений  $L$ . Пусть для любых автоматов  $A$  и  $B$  из  $\mathcal{A}(X, Y; \Xi)$  и состояний  $s \in S_A$  и  $t \in S_B$  включение множеств  $\mu_{As}(L) \subseteq \mu_{Bt}(L)$  влечет их равенство. Предположим, что свойство 2 ограничений  $L$  не выполняется, т.е. существует такое слово

$$w = (x_1, y_1) \dots (x_{i-1}, y_{i-1}),$$

что для некоторых  $(x_i, y'_i)$  и  $(x_i, y''_i)$  из  $\Xi$  слово  $w(x_i, y'_i)$  не принадлежит  $L$ , а слово  $w(x_i, y''_i)$  принадлежит  $L$ . Поскольку свойство 2

для  $\mu_{As}(L)$  эквивалентно свойству  $L_i = L_{i+1}|_i$ , то в  $L$  вообще нет слов начинающихся с  $w(x_i, y'_i)$ . Покажем, как по слову  $w$  можно построить автоматы  $A, B \in \mathcal{A}(X, Y; \Xi)$  такие, что для некоторых  $s \in S_A$  и  $t \in S_B$  выполнится  $\mu_{As}(L) \subset \mu_{Bt}(L)$ . Действительно, пусть  $S_A = \{s_1, s_2, \dots, s_{i+2}\}$ ,  $S_B = \{t_1, t_2, \dots, t_{i+2}\}$ . Определим функции  $\delta_A, \lambda_A, \delta_B, \lambda_B$ . Полагаем, что 1)  $\delta_A(s_j, x_j) = s_{j+1}$ ,  $\delta_B(t_j, x_j) = t_{j+1}$ ,  $\lambda_A(s_j, x_j) = y_j$ ,  $\lambda_B(t_j, x_j) = y_j$ ,  $1 \leq j \leq i-1$ ; 2)  $\lambda_A(s_j, x) = \lambda_B(t_j, x)$  для всех  $x \in X$ ,  $1 \leq j \leq i+2$ , кроме  $\lambda_A(s_i, x_i) = y'_i$  и  $\lambda_B(t_i, x_i) = y''_i$ ; 3) все, до сих пор неопределенные, значения функции переходов  $\delta_A$  и  $\delta_B$  равны  $s_{i+2}$  и  $t_{i+2}$  соответственно.

Из такого определения автоматов  $A$  и  $B$  следует, что множества  $\lambda_{As_1}$  и  $\lambda_{Bt_1}$  отличаются только словами начинающимися с  $w(x_i, y'_i)$  и  $w(x_i, y''_i)$ . По предположению, слово  $w(x_i, y''_i)$  принадлежит  $\mu_{Bt_1}(L)$ , а в  $\mu_{As_1}(L)$  вообще нет слов, начинающихся с  $w(x_i, y'_i)$ . Таким образом  $\mu_{As_1}(L)$  строго включается в  $\mu_{Bt_1}(L)$ , что противоречит свойству 3 множеств  $\mu_{As}(L)$ .

Теорема 1.2.3 доказана.

### 1.3 Неотличимость автоматов относительно среды

В данном разделе исследованы качественные свойства отношения неотличимости автоматов относительно одной и той же среды. Получены критерии бесконечности, конечности и одноэлементности класса автоматов. Найдено принципиальное отличие свойств поведения автоматов, ограниченных и не ограниченных средой.

Зафиксируем произвольную правильную среду с входным алфавитом  $Y$  и выходным  $X$ .

**Определение 1.3.1** *Состояния  $s \in S_A$  и  $t \in S_B$  автоматов  $A$  и  $B$  совместимых со средой  $E$  называются  $i$ -неотличимыми (неотличимыми) относительно среды  $E$ , если  $\mu_{AsE}^i = \mu_{BtE}^i$  ( $\mu_{AsE} = \mu_{BtE}$ ).*

Пусть  $D_{AE}^i = \{\mu_{AsE}^i\}_{s \in S_A}$  и  $D_{AE} = \{\mu_{AsE}\}_{s \in S_A}$ .

**Определение 1.3.2** *Автоматы  $A$  и  $B$ , совместимые со средой  $E$ , называются  $i$ -неотличимыми (неотличимыми) относительно среды  $E$ , если  $D_{AE}^i = D_{BE}^i$  ( $D_{AE} = D_{BE}$ ).*

Отношение  $i$ -неотличимости (неотличимости) автоматов относительно среды  $E$  будет обозначаться через  $\beta_E^i$  ( $\beta_E$ ). Состояния или автоматы, не являющиеся  $i$ -неотличимыми относительно среды  $E$ , назовем  $i$ -различимыми или, просто, различимыми относительно среды  $E$ . В дальнейшем часто будем опускать указание относительно какой среды рассматривается неотличимость, если среда будет ясна из контекста. Дальнейшее исследование отношений  $\beta_E$  и  $\beta_E^i$  в этом разделе основано на методике развитой в [10]. Она заключается в следующем. Изучаемое отношение между автоматами  $A$  и  $B$  сводится к какому-либо хорошо известному отношению (например, эквивалентности) между автоматами  $\chi(A)$  и  $\chi(B)$ , производными от  $A$  и  $B$ . Эти производные автоматы называются характеристизаторами изучаемого отношения для  $A$  и  $B$ .

Отношение  $\beta_E^i$  является эквивалентностью и образует невозрастающую последовательность

$$\beta_E^1 \supseteq \beta_E^2 \supseteq \dots \supseteq \beta_E^i \supseteq \dots \supseteq \beta_E = \bigcap_{i \geq 1} \beta_E^i.$$

Пусть, для простоты обозначений,  $L = L(E)$ ,  $\Xi = \Xi(E)$ . Если алфавит  $X$  состоит из одного символа, то  $L = \Xi^*$ , т.е. среда  $E$  является тривиальной. Если алфавит  $Y$  состоит из одного символа,

то любые состояния любых автоматов, совместимых с  $E$ , являются неотличимыми. В силу этого, рассматриваем далее только входные и выходные алфавиты, состоящие не менее чем из двух символов.

Пусть  $A$  — произвольный совместимый со средой  $E$  автомат. Поставим в соответствие автомату  $A$  и заданному  $i$  конечный, возможно, недетерминированный автомат-характеризатор

$$\chi_E^i(A) = (D_{AE}^i, X, Y, \Delta_{AE}, \Lambda_{AE}),$$

множество состояний которого равно  $D_{AE}^i$ . Функция выходов  $\Lambda_{AE}$  характеризатора определяется соотношением

$$\Lambda_{AE}(\mu_{AsE}^i, x) = \lambda_A(s, x), \quad (1.3)$$

а функция переходов  $\Delta_{AE}$  соотношением

$$\Delta_{AE}(\mu_{AsE}^i, x) = \{ \mu_{AtE}^i | (x, y) \setminus \mu_{AsE}^i \leq \mu_{AtE}^i \}, \quad (1.4)$$

где  $y = \lambda_A(s, x)$ .

Пусть  $C = (S_C, X, Y, \delta_C, \lambda_C)$  и  $D = (S_D, X, Y, \delta_D, \lambda_D)$  — произвольные автоматы. Отображение

$$\gamma : S_C \rightarrow S_D$$

называется гомоморфизмом, если  $s' \in \delta_C(s, x)$  и  $y \in \lambda_C(s, x)$  влечет  $\gamma(s') \in \delta_D(\gamma(s), x)$  и  $y \in \lambda_D(\gamma(s), x)$ . Сюръективный гомоморфизм называется эпиморфизмом, инъективный — мономорфизмом, а сюръективный и инъективный гомоморфизм — изоморфизмом.

**Лемма 1.3.1** *Отображение  $\gamma : S_A \rightarrow D_{AE}^i$  такое, что для всех  $s \in S_A$  выполняется  $\gamma(s) = \mu_{AsE}^i$ , является эпиморфизмом автомата  $A$  на характеризатор  $\chi_E^i(A)$ .*

**Доказательство.**  $\gamma$  сюръективно по определению. Для завершения доказательства рассмотрим произвольные  $s \in S_A$  и  $x \in X$ .

Пусть  $t = \delta_A(s, x)$ ,  $y = \lambda_A(s, x)$ . Из (1.3) следует  $y = \Lambda_{AE}(\gamma(s), x)$ . По условиям 2 и 4 из теоремы 1.2.3 имеем  $(x, y) \setminus \mu_{AsE}^i \leq \mu_{AtE}^i$ . А отсюда и из формулы (1.4) имеем  $\gamma(t) \in \Delta_{AE}(\gamma(s), x)$ .

Лемма доказана.

Из условия 1 теоремы 1.2.3 следует, что характеристизатор всюду определен и детерминирован по функции выходов. Обозначим через  $\Lambda_{As}$  множество всех вход-выходных слов конечной длины порождаемых состоянием  $\gamma(s)$  характеристизатора. Пусть  $M_{As} = \Lambda_{As} \cap L$  и  $M_{As}^i$  — множество всех слов из  $M_{As}$  длины  $i$ .

**Лемма 1.3.2** *Для любого состояния  $\gamma(s)$  характеристизатора  $\chi_E(A)$ , где  $s \in S_A$ ,  $\gamma$  — гомоморфизм автомата  $A$  на характеристизатор, справедливо равенство  $M_{As}^i = \mu_{AsE}^i$ .*

**Доказательство.** Поскольку  $\gamma$  — гомоморфизм, то  $\mu_{AsE}^i \subseteq M_{As}^i$ . Покажем обратное включение. Пусть слово  $(x_1, y_1) \dots (x_i, y_i)$  принадлежит  $M_{As}^i$ . Из определения функций характеристизатора следует, что существует последовательность  $\mu_{As_1E}^i, \dots, \mu_{As_{i+1}E}^i$  состояний из  $D_{AE}^i$ , где  $s_1 = s$ , такая, что  $(x_j, y_j) \leq \mu_{As_jE}^i$  и  $(x_j, y_j) \subseteq \mu_{As_jE}^i \leq \mu_{As_{j+1}E}^i$ ,  $1 \leq j \leq i$ . Отсюда  $(x_1, y_1) \leq \mu_{As_1E}^i$ . Предположим, что  $w_{j-1} = (x_1, y_1) \dots (x_{j-1}, y_{j-1}) \leq \mu_{As_1E}^i$  для некоторого  $j \leq i$ . В силу определения  $M_{As}^i$  и свойства 2 правильных ограничений слово  $(x_1, y_1) \dots (x_j, y_j)$  принадлежит  $L$ . Автомат  $A$  всюду определен, поэтому, в силу свойства 3 правильных ограничений  $L$ , существует  $y'$  такое, что  $w_{j-1}(x_j, y')$  принадлежит  $\mu_{As_1E}^i$ . Легко видеть, что  $(x_j, y') \in \mu_{As_jE}^i$ . Поскольку  $A$  детерминирован, то  $y' = y_j$ . Поэтому  $(x_1, y_1) \dots (x_j, y_j)$  принадлежит  $\mu_{As_1E}^i$ . Индукцией по  $j$  показано, что  $(x_1, y_1) \dots (x_i, y_i) \in \mu_{AsE}^i$ .

Лемма доказана.

Из последней леммы следует равенство

$$\{\mu_{AsE}^i\}_{s \in S_A} = \{M_{Ad}^i\}_{d \in D_{AE}^i}.$$

Полученные результаты позволяют сформулировать критерий  $i$ -неотличимости автоматов.

**Следствие 1.3.1** *Автоматы  $A$  и  $B$   $i$ -неотличимы относительно среды  $E$  в том и только том случае, если характеристаторы  $\chi_E^i(A)$  и  $\chi_E^i(B)$  изоморфны.*

Доказательство сразу вытекает из леммы 1.3.2. Следующее утверждение дает еще один критерий  $i$ -неотличимости.

**Следствие 1.3.2** *Автоматы  $A$  и  $B$  являются  $i$ -неотличимыми в том и только том случае, если существует эпиморфизм автомата  $B$  на характеристатор  $\chi_E^i(A)$ .*

**Доказательство.** Если  $A$  и  $B$   $i$ -неотличимы, то, в силу следствия 1.3.1, такой гомоморфизм существует. Необходимость доказана. Пусть теперь  $\psi$  — некоторый эпиморфизм автомата  $B$  на  $\chi_E^i(A)$ , и  $\gamma$  — эпиморфизм автомата  $A$  на  $\chi_E^i(A)$ . Поскольку указанные гомоморфизмы являются сюръекциями на одно и то же множество, то для любого состояния  $s$  автомата  $A$  существует состояние  $t$  автомата  $B$  такое, что  $\psi(t) = \gamma(s)$  и наоборот. Рассмотрим произвольные состояния  $s \in S_A$  и  $t \in S_B$  такие, что  $\psi(t) = \gamma(s)$ . В силу свойств гомоморфизма, имеем включение  $\lambda_{Bt} \subseteq \Lambda_{As}$ . Но тогда  $\lambda_{Bt} \cap L_i \subseteq \Lambda_{As} \cap L_i$  и, следовательно,  $\mu_{BtE}^i \subseteq \mu_{AsE}^i$ . По условию 3 теоремы 1.2.3  $\mu_{BtE}^i = \mu_{AsE}^i$ . Теорема доказана.

Следуя [10] автомат  $B$  назовем эпиморфной реализацией характеристатора. Тогда следствие 1.3.2 определяет класс  $\beta_E^i(A)$  автоматов  $i$ -неотличимых от  $A$  относительно среды  $E$  как класс всех эпиморфных реализаций заданного характеристатора.

Правила построения характеристатора дают алгоритм решения задачи анализа: по  $A$  и  $i$  построить характеристатор  $\chi_E^i(A)$ . Для существования такого алгоритма достаточно, чтобы множество  $L(E)$  было рекурсивным [21]. Тогда можно явно построить

множества  $\mu_{AsE}^i$ ,  $s \in S_A$ , и по ним сам характеристизатор. Рассмотрим обратную задачу — синтез автомата  $B \in \beta_E^i(A)$  по заданным  $i$  и характеристизатору. Для решения этой задачи преобразуем граф характеристизатора по правилу: для каждого его состояния  $d$  и каждого  $x \in X$  удалим все, кроме одной, дуги, исходящие из  $d$  и отмеченные  $x$ . Получим детерминированный автомат  $B$ . Это преобразование назовем детерминизацией. Очевидно, что  $B$  является эпиморфной реализацией характеристизатора, т.е.  $B \in \beta_E^i(A)$ .

**Следствие 1.3.3** *Если  $L(E)$  — рекурсивное множество, то для всех целых  $i > 0$  существует алгоритм решения задач анализа и синтеза.*

Следующее утверждение характеризует минимальные (по числу состояний) автоматы в классе  $i$ -неотличимости.

**Теорема 1.3.1** *Автомат  $A$  является минимальным в классе  $\beta_E^i(A)$  в том и только том случае, если существует изоморфизм автомата  $A$  в свой характеристизатор.*

**Доказательство.** Поскольку гомоморфизм автомата на свой характеристизатор является эпиморфизмом, то для доказательства теоремы остается показать, что автомат  $A$  минимален в том и только том случае, если гомоморфизм автомата на свой характеристизатор является мономорфизмом. Достаточность этого условия совершенно очевидна. Докажем необходимость. Пусть  $A$  минимален и гомоморфизм  $\gamma$  не является мономорфизмом. Тогда число состояний автомата больше числа состояний характеристизатора. Детерминизацией характеристизатора получаем автомат  $i$ -неотличимый от  $A$  и с меньшим числом состояний, что противоречит минимальности  $A$ . Следовательно,  $\gamma$  — мономорфизм. Теорема доказана.

Последняя теорема определяет подкласс минимальных (по числу состояний) автоматов из  $\beta_E^i(A)$  как класс всех изоморф-

ных реализаций характеристизатора. Пусть  $|D_{AE}^i|$  — мощность множества  $D_{AE}^i$ . Из теоремы 1.3.1 следует, что минимальный автомат имеет  $|D_{AE}^i|$  состояний, а в классе  $i$ -неотличимости содержится ровно  $\prod |\Delta_{AE}(d, x)|$  автоматов, где умножение проводится по всем  $d \in D_{AE}^i$  и  $x \in X$ .

Из определения  $i$ -неотличимости следует, что эквивалентные автоматы  $i$ -неотличимы, т.е. класс  $i$ -неотличимых автоматов всегда бесконечен. Для того, чтобы сделать более прозрачной структуру этого класса будем рассматривать отношение  $\beta_E^i$  на множестве приведенных автоматов. В дальнейшем, если не оговорено противное, считаем, что автоматы приведены.

Ядром класса  $\beta_E^i(A)$  назовем наибольший (по числу состояний) автомат, изоморфно вложимый во все автоматы класса. Для некоторых классов ядро пусто. Следующее утверждение позволяет эффективно построить ядро по характеристизатору. Состояние  $d$  характеристизатора назовем недетерминированным, если  $|\Delta(d, x)| > 1$  для некоторого  $x \in X$ .

**Лемма 1.3.3** *Ядро изоморфно подавтомату характеристизатора, образованному всеми теми его состояниями, из которых недостижимо ни одно недетерминированное состояние.*

**Доказательство.** Пусть  $H$  — это множество всех тех состояний характеристизатора, из которых не достижимо ни одно недетерминированное состояние, а  $H_i(A)$  — подавтомат, образованный этими состояниями. Рассмотрим гомоморфизм  $\gamma$  автомата на характеристизатор. Пусть  $\gamma(s) = \gamma(t)$  и  $\gamma(s) \in H$  для некоторых состояний  $s, t$  автомата  $A$ . Поскольку  $\gamma$  — гомоморфизм, то  $\lambda_{As} \cup \lambda_{At} \subseteq \lambda_{As}$ . Так как из  $\gamma(s)$  достижимы только детерминированные состояния, то  $\lambda_{As}$  является конечно-автоматным отображением, т.е.  $\lambda_{As} = \lambda_{At} = \lambda_{As}$ . Автомат  $A$  приведен, поэтому  $s = t$ . Следова-

тельно, гомоморфный по  $\gamma$  прообраз подавтомата  $H_i(A)$  изоморфен этому подавтомату, т.е.  $H_i(A)$  изоморфно вложим в ядро.

Покажем обратное вложение. Пусть  $A$  минимален по числу состояний в классе  $i$ -неотличимости и  $\gamma(s)$  — некоторое недетерминированное состояние характеристизатора  $\chi_E^i(A)$ . Тогда  $|\Delta_{AE}(\gamma(s), x)| > 1$  для некоторого  $x$ . По теореме 1.3.1  $A$  изоморфно вложим в характеристизатор. Будем считать, что  $S_A = D_{AE}^i$ , т.е.  $\gamma(s) = s$ . По  $A$  построим еще один минимальный автомат  $B$  "переброской" только одной дуги автомата  $A$ . Для этого полагаем, что  $\delta_B(s, x) \neq \delta_A(s, x)$ , но  $\delta_A(s, x), \delta_B(s, x) \in \Delta_{AE}(s, x)$  и  $\lambda_A(s, x) = \lambda_B(s, x)$ . В остальном эти автоматы одинаковы. По построению  $\lambda_{As} \neq \lambda_{Bs}$ . Для  $t \in S_A, t \neq s$  имеем, что  $\mu_{AsE}^i = \mu_{BtE}^i$  и  $\mu_{AsE}^i \neq \mu_{AtE}^i$ . Поэтому  $\lambda_{As} \neq \lambda_{Bt}$  для всех  $t \in S_B$  и тем самым состояние  $s$  не входит в ядро. Из сказанного следует, что ядро изоморфно подавтомату  $H_i(A)$ .

Лемма доказана.

На основании этой леммы  $H_i(A)$  будем называть ядром. Оценим мощность класса  $i$ -неотличимости.

**Теорема 1.3.2** *Класс  $\beta_E^i(A)$  бесконечен в том и только том случае, если в характеристизаторе  $\chi_E^i(A)$  вне ядра существует цикл.*

Доказательство этой теоремы дословно совпадает с доказательством аналогичной теоремы на с.64 в книге [10].

Пусть  $A$  имеет не менее двух состояний. Тогда в  $A$  найдутся состояния  $s_1, s_2$  и  $x \in X$ , для которых  $\lambda_A(s_1, x) \neq \lambda_A(s_2, x)$ . Поэтому характеристизатор имеет не менее двух состояний для всех  $i$ . При  $i = 1$  любое состояние  $d$  характеристизатора недетерминировано, поскольку из 1.4 следует, что  $\Delta_{AE}(d, x) = D_A^1$  для всех  $x \in X$ . Поэтому по теореме 1.3.2 для  $i = 1$  и  $A$ , имеющего не менее двух состояний, класс  $\beta_E^i(A)$  всегда бесконечен. Для  $i \geq 2$  легко при-

вести примеры конечных, бесконечных и одноэлементных классов  $i$ -неотличимости.

**Следствие 1.3.4** *Равносильны утверждения:*

1. класс  $\beta_E^i(A)$  состоит из одного элемента;
2. характеристизатор совпадает со своим ядром, т.е. детерминирован;
3. этот класс имеет единственный минимальный по числу состояний автомат.

**Доказательство.** Действительно, утверждения 2 и 3 равносильны по теореме 1.3.1. Утверждение 1 очевидно влечет 3. Из 2 по теореме 1.3.2 следует, что класс  $\beta_E^i(A)$  конечен. Так как  $\chi_E^i(A)$  детерминирован, то по следствию 1.3.2 он входит в класс и, если  $B \in \beta_E^i(A)$ , то по той же теореме  $B$  является эпиморфным прообразом характеристизатора. Поскольку  $B$  приведен, то он изоморфен характеристизатору, т.е. класс состоит из одного элемента —  $A$ .

Важным классом автоматов являются сильносвязные автоматы. Если автомат сильносвязен, то из леммы 1.3.1 следует, что характеристизатор тоже сильносвязен. Если в сильносвязном характеристизаторе есть хоть одно недетерминированное состояние, то ядро пусто, в противном случае характеристизатор совпадает со своим ядром. Тогда из теоремы 1.3.2 и следствия 1.3.4 вытекает

**Следствие 1.3.5** *Для сильносвязного автомата класс  $i$ -неотличимости бесконечен или состоит из одного элемента.*

Рассмотрим отношение  $\subseteq$  на классе  $i$ -неотличимости, заданное правилом:  $A \subseteq B$ , если  $A$  изоморфно вложим в  $B$ . Этот частичный порядок порождает следующие операции над автоматами:  $\max(A, B)$  — это наименьший автомат  $C$ , для которого  $A, B \subseteq C$ , а  $\min(A, B)$  — это наибольший подавтомат, вложимый в  $A$  и  $B$ .

Очевидно, что класс  $\beta_E^i(A)$  замкнут по операции  $\max$  и, в общем случае, не замкнут по операции  $\min$  над автоматами. Следовательно, он является верхней полурешеткой [24]. Покажем, что она выпукла, т.е., что  $A \subseteq C \subseteq B$  и  $(A, B) \in \beta_E^i$  влечет  $C \in \beta_E^i(A)$ . Если  $C \subseteq B$  и  $B \in \beta_E^i(A)$ , то существует гомоморфизм автомата  $C$  в характеристизатор  $\chi_E^i(A)$ . Поскольку  $A$  входит в этот класс и  $A \subseteq C$ , то этот гомоморфизм является эпиморфизмом и по следствию 1.3.2  $C$  входит в класс. Пусть  $B$  минимален (по  $\subseteq$ ) в этом классе и  $\mathcal{B}(B) = \{C \mid C \in \beta_E^i(A), B \subseteq C\}$ . Легко видеть, что  $\mathcal{B}(B)$  замкнут по операциям  $\max$  и  $\min$  над автоматами, т.е. является решеткой [24]. Поскольку автомат  $B$  приведен, то он однозначно определяется множеством  $\{\lambda_{Bt}\}_{t \in S_B}$  и операции  $\max$  и  $\min$  однозначно определяются объединением и пересечением этих множеств соответственно. Поэтому решетка  $\mathcal{B}(B)$  изоморфна решетке множеств [25] и поэтому [25, с.218] является дистрибутивной. Из сказанного следует утверждение.

**Теорема 1.3.3** *Класс  $\beta_E^i(A)$  является выпуклой полурешеткой и представляет собой объединение дистрибутивных решеток, каждая из которых является классом  $\mathcal{B}(B)$  для некоторого минимального (по  $\subseteq$ ) автомата  $B$  из этого класса.*

Аналогично, как это сделано для отношения  $i$ -неотличимости  $\beta_E^i$ , проводится исследование отношения неотличимости  $\beta_E$ . Все сформулированные выше утверждения, кроме следствия 1.3.3, а именно о задаче анализа, без труда переносятся на случай  $\beta_E$ . Более того, если везде выше заменить символы  $\mu^i$ ,  $\beta_E^i$ ,  $D_{AE}^i$ ,  $\chi_E^i$  на те же, но без верхнего индекса  $i$ , получим аналоги утверждений для  $\beta_E$  и их дословные доказательства. Сформулируем основные из них.

**Теорема 1.3.4** *Автоматы неотличимы в том и только том случае, если их характеристаторы изоморфны.*

**Теорема 1.3.5** *Автомат  $A$  является минимальным в классе  $\beta_E(A)$  в том и только том случае, если существует изоморфизм автомата  $A$  в свой характеристатор.*

**Теорема 1.3.6** *Класс  $\beta_E(A)$  бесконечен в том и только том случае, если в характеристаторе вне ядра существует цикл.*

**Следствие 1.3.6** *Равносильны утверждения:*

1. *класс  $\beta_E(A)$  состоит из одного элемента;*
2. *характеристатор совпадает со своим ядром, т.е. детерминирован;*
3. *этот класс имеет единственный минимальный по числу состояний автомат.*

Все сформулированные утверждения о свойствах классов  $i$ -неотличимых автоматов практически дословно совпадают с формулировками аналогичных утверждений в [10] и являются обобщениями последних. Это обобщение не представляется тривиальным, т.к. охватывает поведение автоматов, взаимодействующих с тривиальными средами (рассмотренными в [10]) и нетривиальными средами. Теорема 1.3.6 для случая тривиальных сред вырождается. В [10] показано, что для тривиальной среды класс  $\beta_E(A)$  всегда состоит из одного автомата. Для нетривиальных сред это не так, что показывает следующая теорема.

**Теорема 1.3.7** *Пусть  $E$  — произвольная правильная среда с входным алфавитом  $Y$ , выходным  $X$  и такая, что  $|\Xi_x(E)| \leq 2$ ,  $x \in X$ . Тогда среда  $E$  тривиальна в том и только том случае, если для любого совместимого с  $E$  автомата  $A$  класс  $\beta_E(A)$  состоит из одного автомата  $A$ .*

**Доказательство.** То, что из тривиальности среды  $E$  следует одноэлементность класса  $\beta_E(A)$ , доказано Муром. Докажем в обратную сторону. Доказательство будет основано на построении контрпримера. Пусть среда  $E$  нетривиальная. Тогда  $L(E) \neq (\Xi(E))^*$ . Пусть  $w = (x_1, y_1) \dots (x_i, y_i)$  кратчайшее слово в алфавите  $\Xi(E)$ , которое не принадлежит  $L(E)$ . Ясно, что тогда  $(x_1, y_1) \dots (x_{i-1}, y_{i-1})(x_i, y) \notin L(E)$  для всех  $(x_i, y) \in \Xi(E)$ . Покажем, что по  $w$  можно построить такой автомат  $A$ , что класс  $\beta_E(A)$  состоит более чем из одного элемента. Действительно, пусть  $S_A = \{s_1, s_2, \dots, s_i, t_1, t_2, \dots, t_i, s\}$ . Определим функции  $\delta_A, \lambda_A$ . Полагаем, что 1)  $\delta_A(s_j, x) = s_{j+1}, \delta_A(t_j, x) = t_{j+1}$  для всех  $x \in X$ , где  $1 \leq j \leq i$  и  $s_{i+1} = t_{i+1} = s$ ; 2)  $\lambda_A(s_j, x) = \lambda_A(t_j, x)$  для всех  $x \in X, 1 \leq j \leq i$ , кроме  $\lambda_A(s_i, x_i) = y'$  и  $\lambda_A(t_i, x_i) = y''$ ; 3)  $\delta_A(s, x) = s, \lambda_A(s, x)$  — произвольно,  $x \in X$ . Символы  $y'$  и  $y''$  не равны — такие существуют в силу того, что  $|\Xi_x(E)| \geq 2, x \in X$ . Из такого определения автомата  $A$  следует, что состояния  $s_2$  и  $t_2$  различимы, поскольку слова длины  $i - 1$   $(x_2, y_2) \dots (x_{i-1}, y_{i-1})(x_i, y')$  и  $(x_2, y_2) \dots (x_{i-1}, y_{i-1})(x_i, y'')$  принадлежат  $\mu_{As_2}$  и  $\mu_{At_2}$  соответственно. С другой стороны, состояния  $s_1$  и  $t_1$  неотличимы, так как множества  $\lambda_{As_1}$  и  $\lambda_{At_1}$  различаются только словами, которые имеют начальные отрезки  $(x_1, y_1) \dots (x_{i-1}, y_{i-1})(x_i, y')$  и  $(x_1, y_1) \dots (x_{i-1}, y_{i-1})(x_i, y'')$  соответственно, но такие слова не принадлежат  $L(E)$ . Следовательно, в характеристизаторе  $\chi_E(A)$  из состояния  $\mu_{As_1}$  или, что тоже самое, из состояния  $\mu_{At_1}$  переход по входному сигналу  $x_1$  будет направлен в два состояния  $\mu_{As_2}$  и  $\mu_{At_2}$ . Значит,  $\mu_{As_1}$  не является детерминированным состоянием, а отсюда, по следствию 1.3.6, класс  $\beta_E(A)$  состоит более чем из одного автомата. Поскольку среда  $E$  была выбрана произвольно, то теорема доказана.

## 1.4 Эффективность сред

Существование алгоритма, проверяющего неотличимость автоматов относительно среды, зависит от самой среды: для одних сред такой алгоритм существует (например, для тривиальных сред), для других — нет (см. раздел 3.4). Построению сред, для которых такой алгоритм существует, посвящена оставшаяся часть работы. В данном разделе вводятся подходящие для этого понятия и доказываются сводимость проблемы неотличимости к ряду других задач.

**Определение 1.4.1** *Правильная среда  $E$  называется эффективной, если существует алгоритм, который по любым двум совместимым с этой средой автоматам и их состояниям  $s$  и  $t$  соответственно устанавливает различимы  $s$  и  $t$  относительно  $E$  или нет*

Рассмотрим произвольный автомат  $A$ . Если в  $A$  выделено два состояния — начальное и заключительное, то назовем этот автомат акцептором. Акцептор будем обозначать через  $A_{s_0, s_1}$ , где  $s_0$  — начальное и  $s_1$  — заключительное состояние. Если автомат  $A$  совместим со средой  $E$ , то будем также говорить, что акцептор  $A_{s_0, s_1}$  совместим со средой  $E$ . Будем говорить, что вход-выходное слово  $(x_1, y_1) \dots (x_i, y_i)$  допускается акцептором, если  $\delta_A(s_0, x_1 \dots x_i) = s_1$  и  $\lambda_A(s_0, x_1 \dots x_i) = y_1 \dots y_i$

Произвольную конфигурацию  $[s, r]$  акцептора  $A_{s_0, s_1}$  и среды  $E$  будем называть начальной (заключительной), если  $s = s_0$  ( $s = s_1$ ). Если существует траектория взаимодействия  $A_{s_0, s_1}$  и  $E$ , которая начинается начальной и заканчивается заключительной конфигурациями, то будем говорить, что акцептор достигает заключительного состояния при взаимодействии со средой.

Пусть  $A_{s_0, s_1}$  несовместим с  $E$ . Будем говорить, что акцептор  $A_{s_0, s_1}$  при взаимодействии со средой  $E$  достигает тупика, если существует траектория их взаимодействия, которая начинается начальной конфигурацией и заканчивается тупиком.

Следующий результат характеризует эффективность с разных точек зрения. Он показывает эквивалентность ряда задач, возникающих при взаимодействии автомата и среды, что позволяет проводить сведение одной задачи к другой.

**Теорема 1.4.1** *Пусть  $E$  — произвольная правильная среда. Следующие утверждения эквивалентны:*

1. *Среда  $E$  эффективная;*
2. *Существует алгоритм, который по любому автомату  $A$ , совместимому с  $E$ , строит характеристизатор  $\chi_E(A)$ ;*
3. *Существует алгоритм, который для любого акцептора, совместимого с  $E$ , отвечает на вопрос: достигнет этот акцептор при взаимодействии с  $E$  заключительного состояния или нет.*
4. *Существует алгоритм, который для любого акцептора отвечает на вопрос: достигнет этот акцептор при взаимодействии с  $E$  тупика или нет.*

**Доказательство.** Покажем, что из (1) следует (2). Пусть автомат  $A$  совместим со средой  $E$ . Обозначим через  $S_A(s)$ , где  $s \in S_A$ , множество всех состояний автомата  $A$  неотличимых от  $s$  относительно  $E$ . Построим следующий, возможно недетерминированный, автомат  $\chi$ , состояниями которого являются всевозможные различные  $S_A(s)$ ,  $s \in S_A$ . Входной и выходной алфавиты автомата  $\chi$  совпадают с соответствующими алфавитами автомата  $A$ . Для каждого входного символа  $x$  полагаем, что  $\lambda_\chi(S_A(s)) = \lambda_A(s, x)$  и  $\delta_\chi(S_A(s), x) = \{S_A(t) \mid \delta_A(s', x) = t, s' \in S_A(s)\}$ . Теперь, если в

последних формулах заменить обозначение  $S_A(s)$  на  $\mu_{AsE}$ , то очевидным образом определение функций автомата  $\chi$  преобразуется в определение функций характеристизатора  $\chi_E(A)$ . Другими словами, показано, что  $\chi$  и  $\chi_E(A)$  изоморфны и таким образом доказано требуемое утверждение.

Покажем, что из (2) следует (1). Пусть по  $A$  построен характеристизатор  $\chi_E(A)$ . Рассмотрим произвольный автомат  $B$  и произвольные состояния  $s \in S_A$  и  $t \in S_B$ . Пусть  $\gamma$  — эпиморфизм автомата  $A$  на  $\chi_E(A)$ . Поскольку все рассматриваемые автоматы конечны, то, по крайней мере, простым перебором можно проверить существует ли такой гомоморфизм  $\psi$  автомата  $B$  на  $\chi_E(A)$ , что  $\psi(t) = \gamma(s)$ . Если существует, то  $A$  и  $B$  неотличимы относительно  $E$ , в противном случае,  $A$  и  $B$  различимы.

Покажем, что из (1) следует (3). Пусть  $A_{s_0, s_1}$  — произвольный акцептор, совместимый с  $E$ . Построим по этому акцептору два автомата  $A'$  и  $A''$  совместимых с  $E$ . Пусть  $S_{A'} = S_{A''} = S_A$  и функции этих автоматов совпадают с функциями автомата  $A$  за следующим исключением. Если автомат  $A$  из состояния  $s$  по входному сигналу  $x$  переходит в состояние  $s_1$ , то соответствующие значения функций автоматов  $A'$  и  $A''$  определяются произвольно, но так, чтобы  $\lambda_{A'}(s, x) \neq \lambda_{A''}(s, x)$ . Легко видеть, что состояние  $s_0$  автомата  $A'$  и одноименное состояние  $s_0$  автомата  $A''$  неотличимы в том и только том случае, если акцептор  $A_{s_0, s_1}$  при взаимодействии с  $E$  не достигает заключительного состояния.

Покажем, что из (3) следует (1). Рассмотрим произвольные автоматы  $A$  и  $B$ , совместимые с  $E$ . Определим по  $A$  и  $B$  автомат  $D$ , так называемый автомат пар состояний, в котором множество состояний  $S_D$  равно  $S_A \times S_B \cup \{s_1\}$ , где  $s_1$  — вспомогательный символ, не принадлежащий алфавитам  $S_A, S_B$  и  $S_A \times S_B$ . Для произвольного состояния  $(s, t) \in S_A \times S_B$  и входного сигнала

$x \in X$  полагаем значение функции  $\delta_D((s, t), x)$  равным  $\lambda_A(s, x)$ , если  $\lambda_A(s, x) = \lambda_B(s, x)$ , и, в противном случае, полагаем равным  $s_1$ . При этом выходной сигнал  $\lambda_D((s, t), x)$  равен  $\lambda_A(s, x)$ . Значения  $\lambda_D(s_1, x)$  и  $\delta_D(s_1, x)$  для всех входных сигналов  $x$  определяются произвольно, но так, чтобы  $D$  был совместим с  $E$ . Из построения автомата  $D$  следует, что произвольные состояния  $s$  и  $t$  автоматов  $A$  и  $B$  соответственно неотличимы в том и только том случае, если акцептор  $D_{(s,t),s_1}$  при взаимодействии со средой  $E$  не достигнет заключительного состояния.

Покажем, что из (3) следует (4). Рассмотрим произвольный акцептор  $A_{s_0,s_1}$ , не важно совместим он с  $E$  или нет. Рассмотрим возможные виды тупиков автомата  $A$  и среды  $E$ . Во-первых, конфигурация  $[s, r]$ ,  $s \in S_A$ ,  $r \in R_E$ , может оказаться тупиком, если отметка вершины  $r$  не принадлежит входному алфавиту автомата. Во-вторых, функция выходов состояния  $s$  по отметке вершины  $r$  выдает сигнал, по которому не определено движение из  $r$ .

Преобразуем акцептор  $A_{s_0,s_1}$  в акцептор  $A'_{s_0,s^*}$ , совместимый с  $E$ , где состояние  $s^*$  введено для вспомогательных целей и не принадлежит  $S_A$ . Теперь для каждого состояния  $s \in S_A$  и символа  $x$  из алфавита отметок вершин среды  $E$  полагаем, что если не определено  $\delta_A(s, x)$  или  $\delta_E(r, \lambda_A(s, x))$ , где  $r$  имеет отметку  $x$ , то  $\delta_{A'}(s, x) = s^*$ , иначе  $\delta_{A'}(s, x) = \delta_A(s, x)$ . При этом если  $\delta_{A'}(s, x) \neq s_1$ , то  $\lambda_{A'}(s, x) = \lambda_A(s, x)$ ; если  $\delta_{A'}(s, x) = s^*$ , то  $\lambda_{A'}(s, x)$  произвольно, но такое, чтобы  $A'$  и  $E$  были совместимы. Функции заключительного состояния  $s^*$  также произвольны, но опять требуется, чтобы соблюдалась совместимость. Из построения  $A'$  следует, что любые траектории  $\text{Tr}_{AE}([s_0, r])$  и  $\text{Tr}_{A'E}([s_0, r])$ , где  $r \in R_E$ , либо совпадают, это в случае, если  $\text{Tr}_{AE}([s_0, r])$  не тупиковая, либо, если  $\text{Tr}_{AE}([s_0, r])$  — тупиковая, то  $\text{Tr}_{A'E}([s_0, r])$  содержит заключительную конфигурацию.

Покажем, что из (4) следует (3). Пусть акцептор  $A_{s_0, s_1}$  совместим со средой  $E$ . Преобразуем функцию выходов заключительного состояния  $s_1$ , положив ее, для любого входного сигнала, равной произвольному символу, не принадлежащему входному алфавиту среды. Таким образом, получен некоторый акцептор  $A'_{s_0, s_1}$ , для которого любая конфигурация вида  $[s_1, r]$ ,  $r \in R_E$ , является тупиком. Следовательно  $A'_{s_0, s_1}$  достигнет тупика в том и только том случае, если  $A_{s_0, s_1}$  достигнет заключительного состояния.

Теорема доказана.

Сведение эффективности среды к проблеме достижения заключительного состояния является основой для оставшейся части работы.

В заключение раздела приведем в качестве простого следствия одно достаточное условие эффективности сред.

**Следствие 1.4.1** *Для эффективности произвольной правильной среды  $E$  достаточно, чтобы язык  $L(E)$  был контекстно-свободным.*

**Доказательство.** Рассмотрим произвольный акцептор  $A_{s_0, s_1}$ , совместимый со средой  $E$ , такой, что  $L(E)$  является контекстно-свободным языком. Обозначим здесь через  $\lambda$  множество всех вход-выходных слов, допускаемых акцептором. Язык  $\lambda$  является регулярным. Понятно, что  $A_{s_0, s_1}$  достигнет при взаимодействии с  $E$  заключительного состояния в том и только том случае, если множество  $\lambda \cap L(E)$  непусто. Но поскольку проблема пустоты пересечения регулярного и контекстно-свободного языков алгоритмически разрешима [7], то среда  $E$  эффективна.

Следствие доказано.

## Глава 2

# Преобразования эффективных сред

В данной главе введены преобразования сред, позволяющие строить из простых эффективных сред более сложные. Эти преобразования являются мощным средством при доказательстве эффективности геометрических сред, рассмотренных в главе 3.

### 2.1 Преобразование функций среды

В данном разделе вводятся необходимые понятия для основного содержания главы и описываются простейшие преобразования сред, сохраняющих эффективность. Результаты раздела являются вспомогательными для более сложных преобразований в последующих разделах.

Рассмотрим произвольный, возможно, бесконечный (счетный) класс правильных сред  $\mathcal{E} = \{E_i\}_{i \in I}$ , где  $I$  — множество индексов. Пусть среда  $E$  равна объединению сред класса  $\mathcal{E}$ . Ясно, что тогда

$$L(E) = \bigcup_{i \in I} L(E_i).$$

**Определение 2.1.1** *Класс сред  $\mathcal{E}$  называется эффективным, если среда, являющаяся объединением сред этого класса, является*

*эффективной.*

**Определение 2.1.2** *Класс сред  $\mathcal{E}$  называется правильным, если объединение сред этого класса является правильной средой.*

Поскольку в работе исследуется эффективность сред, то благодаря этому, мы не будем различать класс сред и среду, являющуюся объединением сред класса.

**Определение 2.1.3** *Два класса сред  $\mathcal{E}'$  и  $\mathcal{E}''$  называются эквивалентными, если  $L(\mathcal{E}') = L(\mathcal{E}'')$ .*

В силу определений имеем простые утверждения.

**Следствие 2.1.1** *Правильная среда, эквивалентная эффективной среде, является эффективной.*

**Следствие 2.1.2** *Правильный класс, состоящий из конечного числа эффективных сред, является эффективным.*

**Доказательство.** Утверждение очевидно, поскольку для того, чтобы проверить неотличимость двух автоматов относительно конечного класса эффективных сред, достаточно проверить их неотличимость относительно каждой среды этого класса.

Опишем теперь преобразование среды, которое назовем усечением функции переходов. Рассмотрим произвольную эффективную среду  $E = (R_E, Y, X, \delta_E, \lambda_E)$ . Пусть правильная среда  $E' = (R_{E'}, Y, X, \delta_{E'}, \lambda_{E'})$  получена из  $E$  удалением некоторого заданного множества дуг. Понятно, что тогда  $R_{E'} = R_E$ ,  $\lambda_{E'} = \lambda_E$ , и для любых  $r \in R_E$  и  $y \in Y$ , если значение функции  $\delta_{E'}(r, y)$  определено, то определено и  $\delta_E(r, y)$ . Будем говорить, что  $E'$  получена из  $E$  усечением функции переходов.

**Теорема 2.1.1** *Среда, полученная усечением функции переходов эффективной среды, является эффективной.*

**Доказательство.** Пусть среда  $E'$  получена из эффективной среды  $E$  усечением функции переходов. Рассмотрим произвольный совместимый с  $E'$  акцептор  $A_{s_0, s_1}$ . Отсюда следует также, что  $A_{s_0, s_1}$  совместим с  $E$ . Рассмотрим произвольную вершину  $r \in R_E$ . В силу определения,  $E'$  имеем, что  $\text{Tr}_{AE'}([s_0, r]) = \text{Tr}_{AE}([s_0, r])$ . Значит, траектории  $\text{Tr}_{AE'}([s_0, r])$  и  $\text{Tr}_{AE}([s_0, r])$  содержат или не содержат заключительные конфигурации только одновременно. Отсюда следует, что  $A_{s_0, s_1}$  достигнет заключительного состояния при взаимодействии с  $E'$  в том и только том случае, если  $A_{s_0, s_1}$  достигнет заключительного состояния при взаимодействии с  $E$ . В силу эффективности среды  $E$ , теорема доказана.

Опишем теперь преобразование сред, которое назовем переименованием отметок вершин среды.

Пусть задана произвольная эффективная среда  $E$  с входным алфавитом  $Y$  и выходным  $X$ . Введем вспомогательный алфавит  $X'$ , число символов в котором не превышает числа символов в  $X$ , и произвольную функцию

$$f : X \rightarrow X'.$$

Будем говорить, что среда  $E' = (R_{E'}, Y, X, \delta_{E'}, \lambda_{E'})$  получена из  $E$  переименованием отметок вершин, если  $R_{E'} = R_E$ ,  $\delta_{E'} = \delta_E$  и для любого  $r \in R_E$   $\lambda_{E'}(r) = f(\lambda_E(r))$ .

**Теорема 2.1.2** *Среда, полученная переименованием отметок вершин эффективной среды, является эффективной.*

**Доказательство.** Пусть среда  $E'$  получена переименованием отметок вершин из эффективной среды  $E$ . Рассмотрим произвольный акцептор  $A_{s_0, s_1} = (S_A, X', Y, \delta_A, \lambda_A)$ , совместимый со средой  $E'$ . Преобразуем его в акцептор  $B_{s_0, s_1} = (S_B, X, Y, \delta_B, \lambda_B)$ , совместимый со средой  $E$ , такой, что  $S_B = S_A$  и

$$\delta_B(s, x) = \delta_A(s, f(x)),$$

$$\lambda_B(s, x) = \lambda_A(s, f(x)).$$

В силу определения  $E'$  и  $B$ , имеем для любых  $s \in S_A$  и  $r \in R_E$  равенство  $\delta_{AE'}((s, r), z) = \delta_{BE}((s, r), z)$ , откуда следует равенство траекторий  $\text{Tr}_{AE'}([s_0, r]) = \text{Tr}_{BE}([s_0, r])$  для любых начальных конфигураций  $[s_0, r]$ . Следовательно,  $A_{s_0, s_1}$  достигнет при взаимодействии с  $E'$  заключительного состояния в том и только том случае, если  $B_{s_0, s_1}$  достигнет заключительного состояния при взаимодействии с  $E$ . Последнее — алгоритмически разрешимая проблема, в силу эффективности среды  $E$ .

Теорема доказана.

## 2.2 Общее преобразование вершин среды

В данном разделе вводится преобразование вершин сред. Исследование этого преобразования проводится в последующих разделах, где найдены достаточные условия, при которых оно сохраняет эффективность.

Для преобразования необходимо задать пять объектов  $E, \mathcal{F}, \Delta, \mathcal{P}, I$ .

1)  $E$  является исходной средой (классом сред) с входным алфавитом  $Y$  и выходным  $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ .

2)  $\mathcal{F}$  представляет собой множество  $\{\mathcal{F}(i)\}_{1 \leq i \leq n}$  классов сред  $\mathcal{F}(i) = \{F_k(i)\}_{k \in I(i)}$  с входным алфавитом  $Q$  и выходным  $P$ , где  $I(i)$  — множество индексов,  $1 \leq i \leq n$ . Алфавиты  $Q$  и  $Y$  не должны иметь общих символов.

3)  $I$  — это произвольное непустое подмножество упорядоченных наборов индексов из  $I(1) \times I(2) \times \dots \times I(n)$ .

4)  $\mathcal{P} = \{P(i)\}_{1 \leq i \leq n}$ , где  $P(i)$  — произвольное подмножество отметок из  $P$  такое, что для любого символа  $p \in P(i)$  в каждой среде из  $\mathcal{F}(i)$  существует единственная вершина с отметкой  $p$ . В

силу такого свойства множеств  $P(i)$ , вершины сред из класса  $\mathcal{F}(i)$  с отметками  $p \in P(i)$  будем называть тем же именем  $p$ , т.е. считать, что  $P(i) \subseteq R_{F_k(i)}$ ,  $k \in I(i)$ . То, что разные среды из классов  $\mathcal{F}(i)$ ,  $1 \leq i \leq n$ , могут иметь вершины с одинаковыми именами, не должно вызвать в дальнейшем путаницы, поскольку, если будет говориться о вершине  $p$  с отметкой  $p \in P(i)$ , то будет ясно, какой среде она принадлежит.

5)  $\Delta = \{\delta_{ij}\}_{1 \leq i, j \leq n}$ , где  $\delta_{ij}$  — произвольная всюду определенная функция  $\delta_{ij} : P(i) \times Y \rightarrow P(j)$ . Выделим в области определения каждой функции  $\delta$  из класса  $\Delta$  некоторое произвольное подмножество, возможно пустое. Значения функции  $\delta$  на элементах этого множества назовем фиктивными доопределениями функции  $\delta$ . Договоримся только, что при выделении таких подмножеств выполняется следующее условие: для произвольных функций  $\delta'$  и  $\delta''$  из  $\Delta$  и произвольной пары  $(p, y) \in P \times Y$ , входящей в область определения каждой из этих функций, значение функции  $\delta'(p, x)$  не является фиктивным доопределением в том и только том случае, если значение функции  $\delta''(p, x)$  также не является фиктивным доопределением.

Опишем теперь по заданным  $\mathcal{F}$ ,  $\mathcal{P}$ ,  $\Delta$ ,  $I$  преобразование среды  $E$ .

Преобразование проводится отдельно для каждого набора  $e \in I$ . При этом далее преобразованную среду будем обозначать через  $J_e = (R_{J_e}, Q \cup Y, P, \delta_{J_e}, \lambda_{J_e})$ . Полностью выполненное преобразование определяет класс сред  $J = \{J_e\}_{e \in I}$ .

Пусть  $e = (k_1, \dots, k_n)$  (с целью упрощения дальнейших обозначений, среду  $F_{k_i}(i)$  будем обозначать через  $F_e(i)$ ,  $1 \leq i \leq n$ ), тогда в среде  $E$  каждая ее вершина  $r_E \in R_E$  заменяется множеством вершин среды  $F_e(i) = F_{k_i}(i) \in \mathcal{F}(i)$ , где  $i$  такое, что  $x_i = \lambda_E(r_E)$ ,

т.е.

$$R_{J_e} = \bigcup_{r_E \in R_E} R_{F_e(i)} \times r_E,$$

где  $\lambda_E(r_E) = x_i$ .

Далее по следующим формулам на новом множестве вершин определяются функции выходов  $\lambda_{J_e}$  и переходов  $\delta_{J_e}$ . Пусть  $(r, r_E) \in R_{J_e}$  и вершина  $r_E$  имеет отметку  $x_i$ , тогда

$$\lambda_{J_e}(r, r_E) = \lambda_{F_e(i)}(r),$$

$$\delta_{J_e}((r, r_E), y) = \begin{cases} (\delta_{F_e(i)}(r, y), r_E), & y \in Q, \\ (\delta_{ij}(r, y), \delta_E(r_E, y)), & y \in Y, \end{cases}$$

где  $j$  такое, что  $x_j$  является отметкой вершины  $\delta_E(r_E, y)$ . Если правая часть в последней формуле неопределена (либо неопределено значение функции  $\delta_E$ , либо функции  $\delta_{ij}$ ), то неопределена и левая часть. Заметим, для того, чтобы функция  $\delta_{ij}$  была определена, необходимо, чтобы вершина  $r$  принадлежала  $P(i)$ . Кроме того, если значение функции  $\delta_{ij}$  в последней формуле является фиктивно-доопределенным, то значение функции переходов  $\delta_{J_e}((r, r_E), y)$  также назовем фиктивно-доопределенным.

Построение среды  $J_e$  и, следовательно, среды  $J$  закончено. Нетрудно заметить, что если среда  $\mathcal{F}$  правильная, то и среда  $J$  тоже будет правильной.

Фиктивное доопределение значений функций переходов среды  $J$  необходимо нам в дальнейшем для дополнительного преобразования сред, привязанного к преобразованию вершин среды по заданным  $\mathcal{F}$ ,  $\mathcal{P}$ ,  $\Delta$ ,  $I$ . Это преобразование выражено в следующем утверждении.

**Следствие 2.2.1** Пусть эффективная среда  $J$  получена преобразованием вершин некоторой среды по заданной правильной среде  $\mathcal{F}$  и заданным  $\mathcal{P}$ ,  $\Delta$ ,  $I$ . Если теперь в  $J$  сделать неопределенными

все фиктивно-доопределенные значения функции переходов, то  $J$  по-прежнему останется эффективной.

Утверждение по сути следует из теоремы 2.1.1 (усечение функции переходов). Достаточно показать только правильность получившейся среды, т.е. показать, что если из вершины  $r$  с отметкой  $p$  определен переход по входу  $y$ , то из любой вершины с такой отметкой  $p$  определен переход по входу  $y$ . А это следует из того, что класс сред  $\mathcal{F}$  правильный, и из того, что если  $\delta_J((r, r_E), y)$  не является фиктивно-доопределенным значением, то и  $\delta_J((r', r'_E), y)$  не является фиктивно-доопределенным значением, если отметки вершин  $(r, r_E)$  и  $(r', r'_E)$  совпадают (с. 53).

В последующем введенное преобразование для удобства будет называться по разному, в зависимости от мощности множества  $I$ .

**Определение 2.2.1** Преобразование среды  $E$  по заданным  $\mathcal{F}$ ,  $\mathcal{P}$ ,  $\Delta$ ,  $I$ , где  $I$  состоит из одного элемента  $e$ , назовем одномерным преобразованием вершин среды  $E$ .

Иногда в дальнейшем будем говорить, что одномерное преобразование вершин осуществляется по заданным  $F(i)$ ,  $\mathcal{P}$ ,  $\Delta$ ,  $1 \leq i \leq n$ , где  $F(i) = F_e(i)$  и  $e$  — единственный элемент множества  $I$ .

**Определение 2.2.2** Преобразование среды  $E$  по заданным  $\mathcal{F}$ ,  $\mathcal{P}$ ,  $\Delta$ ,  $I$ , где  $I$  — конечное множество, назовем объединением одномерных преобразований вершин среды  $E$ .

**Определение 2.2.3** Преобразование среды  $E$  по заданным  $\mathcal{F}$ ,  $\mathcal{P}$ ,  $\Delta$ ,  $I$ , где  $I$  — счетное множество, назовем двумерным преобразованием вершин среды  $E$ .

## 2.3 Одномерное преобразование вершин среды

Цель данного раздела доказать, что одномерное преобразование вершин эффективной среды всегда дает эффективную среду. Отсюда также будет следовать, что и объединение одномерных преобразований сохраняет эффективность.

Пусть среда  $J_e$ ,  $e \in I$  получена одномерным преобразованием вершин среды  $E$  по заданным  $F_e(i)$ ,  $\mathcal{P}$ ,  $\Delta$ . Покажем как по произвольному совместимому со средой  $J_e$  акцептору  $A_{s_0, s_1}$  можно построить конечное число акцепторов, совместимых со средой  $E$ , таких, что  $A_{s_0, s_1}$  при взаимодействии с  $J_e$  достигнет заключительного состояния в том и только том случае, если хотя бы один из указанных акцепторов также достигнет заключительного состояния при взаимодействии с  $E$ . Тогда отсюда и из эффективности среды  $E$  будет следовать эффективность среды  $J_e$ .

Пусть  $e = (k_1, k_2, \dots, k_n)$ . Для каждого  $i$ ,  $1 \leq i \leq n$ , определим по среде  $F_e(i)$  и акцептору  $A_{s_0, s_1}$  вспомогательное отображение

$$\psi_i : S_A \times P(i) \rightarrow S_A \times P(i) \cup \{(s_1, -), (-, -)\},$$

где  $-$  — вспомогательный символ, не принадлежащий уже введенным алфавитам. Значение функции  $\psi(s, p)$ , где  $s \in S_A$ ,  $p \in P(i)$ , показывает результат взаимодействия акцептора  $A_{s_0, s_1}$  со средой  $F_e(i)$  из конфигурации  $[s, p]$ . Поскольку, в общем случае, этот акцептор и данная среда несовместимы, то возможны только три взаимоисключающих ситуации:

1) траектория  $\text{Tr}([s, p])$  содержит заключительную конфигурацию;

2) траектория  $\text{Tr}([s, p])$  не содержит заключительную конфигурацию, но заканчивается некоторым тупиком  $[s', p']$ , т.е.

$\lambda_A(s', p') \in Y$  (напомним, что алфавиты  $Q$  и  $Y$  не имеют общих символов);

3) траектория  $\text{Tr}([s, p])$  не содержит ни заключительной конфигурации, ни тупика.

Значение функции  $\psi_i(s, p)$  в первом случае полагаем равным  $(s_1, -)$ , во втором —  $(s', p')$ , в третьем —  $(-, -)$ . Назовем  $\psi_i$  функцией окончания взаимодействия акцептора  $A_{s_0, s_1}$  и среды  $F_e(i)$  из конфигураций  $S_A \times P(i)$ .

**Лемма 2.3.1** *Существует алгоритм, который по конечной среде  $F_e(i)$  и акцептору  $A_{s_0, s_1}$  строит функцию  $\psi_i$ ,  $1 \leq i \leq n$ .*

**Доказательство.** Действительно, чтобы найти значение функции  $\psi_i$  на произвольной паре  $(s, p) \in S_A \times P(i)$  надо построить траекторию  $\text{Tr}([s, p])$  взаимодействия  $A_{s_0, s_1}$  и  $F_e(i)$  из конфигурации  $[s, p]$ . В силу конечности множеств  $S_A$  и  $R_{F_e(i)}$ , эта траектория в конце концов либо зациклится, либо закончится тупиком. Отсюда следует, что достаточно просмотреть траекторию конечной длины, чтобы выяснить значение функции  $\psi_i$ . Лемма доказана.

Определим вспомогательное множество

$$\Theta_i \subseteq S_A \times P(i) \cup \{(s_1, -), (-, -)\}.$$

Пара  $(s_1, -)$  принадлежит множеству  $\Theta_i$ , если в среде  $F_e(i)$  найдется вершина  $r$  такая, что траектория  $\text{Tr}([s_0, r])$  содержит заключительную конфигурацию.

Пара  $(s, p) \in S_A \times P(i)$  принадлежит множеству  $\Theta_i$ , если найдется вершина  $r$  среды  $F_e(i)$  такая, что траектория  $\text{Tr}([s_0, r])$  не содержит заключительную конфигурацию, но заканчивается тупиком  $[s, p]$ .

И, наконец, пара  $(-, -)$  принадлежит  $\Theta_i$ , если для любой вершины  $r$  среды  $F_e(i)$  траектория  $\text{Tr}([s_0, r])$  не содержит ни заключительной конфигурации, ни тупика.

Ясно, что либо  $\Theta_i$  не содержит  $(-, -)$ , либо  $\Theta_i = \{(-, -)\}$ . Множество  $\Theta_i$  назовем множеством окончаний взаимодействия  $A_{s_0, s_1}$  и  $F_e(i)$  из начальных конфигураций. Обозначим множество  $\Theta_1 \times \Theta_2 \times \dots \times \Theta_n$  через  $\Theta_e$ .

**Лемма 2.3.2** *Существует алгоритм, который по конечной среде  $F_e(i)$  и акцептору  $A_{s_0, s_1}$  строит множество  $\Theta_i$ ,  $1 \leq i \leq n$ .*

**Доказательство.** Действительно, чтобы построить множество  $\Theta_i$ , надо построить траектории  $\text{Tr}([s_0, r])$  взаимодействия  $A_{s_0, s_1}$  и  $F_e(i)$  для всевозможных начальных конфигураций  $[s_0, r]$ . В силу конечности множеств  $S_A$  и  $R_{F_e(i)}$ , каждая из этих траекторий в конце концов либо заиклится, либо закончится тупиком. Отсюда следует, что достаточно просмотреть конечное число траекторий конечной длины, чтобы определить  $\Theta_i$ . Лемма доказана.

Определим по акцептору  $A_{s_0, s_1}$ , отображениям  $\psi_i$ ,  $1 \leq i \leq n$ , и множеству  $\Theta_e$  некоторый класс  $\mathcal{B}(e)$  акцепторов, совместимых со средой  $E$ . Разные акцепторы из  $\mathcal{B}(e)$  соответствуют разным  $\theta$  из  $\Theta_e$ . Зафиксируем набор  $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_n) \in \Theta_e$  и соответственно ему построим акцептор  $B_{t_0, t_1} \in \mathcal{B}(e)$ . Полагаем, что  $B_{t_0, t_1}$  имеет множество состояний

$$S_A \times P(1) \times P(2) \times \dots \times P(n) \cup \{t_0, t_1, t_2\},$$

где  $t_0, t_1, t_2$  — вспомогательные символы, не принадлежащие уже введенным алфавитам. Для произвольного состояния вида  $s_B = (s_A, p_1, \dots, p_i, \dots, p_n) \in S_B$  определим значения функций переходов  $\delta_B$  и выходов  $\lambda_B$ . Для каждого  $i$ ,  $1 \leq i \leq n$ , полагаем, что:

$$\lambda_B(s_B, x_i) = \begin{cases} \text{произвольно, } \psi_i(s_A, p_i) \in \{(s_1, -), (-, -)\}, \\ \lambda_A(s, p), \psi_i(s_A, p_i) = (s, p) \in S_A \times P(i), \end{cases} \quad (2.1)$$

$$\delta_B(s_B, x_i) = \begin{cases} t_1, & \psi_i(s_A, p_i) = (s_1, -), \\ t_2, & \psi_i(s_A, p_i) = (-, -), \\ s'_B, & \psi_i(s_A, p_i) \in S_A \times P(i), \end{cases} \quad (2.2)$$

где  $s'_B = (\delta_A(s, p), \delta_{i1}(p, y), \dots, \delta_{in}(p, y))$ , если  $\psi_i(s_A, p_i) = (s, p)$  и  $y = \lambda_A(s, p)$ . Роль состояния  $t_2$  такая, что из него не достигимо заключительное состояние  $t_1$ , что достигается определением  $\delta_B(t_2, x) = t_2$  для всех  $x \in X$ . Функция выходов состояния  $t_2$  произвольна. Для полного построения акцептора  $B_{t_0, t_1}$  осталось определить функции переходов и выходов для начального состояния  $t_0$  и заключительного  $t_1$ . Для состояния  $t_1$  эти функции произвольны, для  $t_0$  зависят от выбранного элемента  $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_n) \in \Theta_e$ , а именно, для произвольного  $i$ ,  $1 \leq i \leq n$ , имеем следующие формулы:

$$\lambda_B(t_0, x_i) = \begin{cases} \text{произвольно,} & \theta_i \in \{(s_1, -), (-, -)\}, \\ \lambda_A(s, p), & \theta_i = (s, p) \in S_A \times P(i), \end{cases} \quad (2.3)$$

$$\delta_B(t_0, x_i) = \begin{cases} t_1, & \theta_i = (s_1, -), \\ t_2, & \theta_i = (-, -), \\ s'_B, & \theta_i \in S_A \times P(i), \end{cases} \quad (2.4)$$

где  $s'_B = (\delta_A(s, p), \delta_{i1}(p, y), \dots, \delta_{in}(p, y))$ , если  $\theta_i = (s, p)$  и  $y = \lambda_A(s, p)$ . Заметим, что везде, где говорилось "произвольно", подразумевалось, что акцептор  $B_{t_0, t_1}$  и среда  $E$  должны быть совместимыми. Построение акцептора  $B_{t_0, t_1}$  и, следовательно, класса  $\mathcal{B}(e)$  закончено. Будем говорить, что класс  $\mathcal{B}(e)$  получен из  $A_{s_0, s_1}$  преобразованием, сопряженным с одномерным преобразованием вершин среды  $E$ .

**Лемма 2.3.3** Пусть среда  $J_e$  получена одномерным преобразованием вершин среды  $E$ , тогда существует алгоритм построения класса акцепторов  $\mathcal{B}(e)$  по совместимому с  $J_e$  акцептору  $A_{s_0, s_1}$  преобразованием, сопряженным с последним.

**Доказательство.** Поскольку класс  $\mathcal{B}(e)$  полностью определяется по  $\psi_i$ ,  $1 \leq i \leq n$ , и  $\Theta_e$ , то доказательство вытекает из лемм 2.3.1 и 2.3.2.

**Теорема 2.3.1** Пусть среда  $J_e$  получена одномерным преобразованием вершин среды  $E$ . Пусть класс акцепторов  $\mathcal{B}(e)$  получен из акцептора  $A_{s_0, s_1}$ , совместимого с  $J_e$ , преобразованием, сопряженным с преобразованием  $E$  в  $J_e$ . Тогда  $A_{s_0, s_1}$  достигнет заключительного состояния при взаимодействии с  $J_e$  в том и только том случае, если хотя бы один акцептор из класса  $\mathcal{B}(e)$  достигнет заключительного состояния при взаимодействии с  $E$ .

Прежде чем приступить к доказательству теоремы, докажем вспомогательное утверждение. Для этого рассмотрим произвольный акцептор  $B_{t_0, t_1}$  из класса  $\mathcal{B}(e)$ . Конфигурацию  $K_A$  акцептора  $A_{s_0, s_1}$  и среды  $J_e$  и конфигурацию  $K_B$  акцептора  $B_{t_0, t_1}$  и среды  $E$  назовем адекватными, если  $K_A$  имеет вид  $[s_A, (p_i, r_E)]$  и  $K_B$  имеет вид  $[(s_A, p_1, \dots, p_i, \dots, p_n), r_E]$ , где  $i$  такое, что  $r_E$  имеет отметку  $x_i$ .

**Лемма 2.3.4** Пусть  $K_A^1$  и  $K_B^1$  адекватные конфигурации соответственно акцепторов  $A_{s_0, s_1}$  и  $B_{t_0, t_1}$ , и  $B_{t_0, t_1}$  за один шаг переходит из  $K_B^1$  в конфигурацию  $K_B^2 = [s_B^2, r_E^2]$ . Тогда справедливы следующие свойства:

1. Если  $s_B^2 \notin \{t_2, t_1\}$ , то для некоторого  $i$  траектория  $\text{Tr}_{AJ_e}^i(K_A^1)$  заканчивается конфигурацией  $K_A^2$  адекватной  $K_B^2$  и не содержит заключительную конфигурацию.

2. Если  $s_B^2 = t_1$ , то траектория  $\text{Tr}_{AJ_e}(K_A^1)$  содержит заключительную конфигурацию.

3. Если  $s_B^2 = t_2$ , то траектория  $\text{Tr}_{AJ_e}(K_A^1)$  не содержит заключительную конфигурацию.

**Доказательство.** Пусть  $K_A^1 = [s_A^1, (p^1, r_E^1)]$ ,  $K_B^1 = [s_B^1, r_E^1]$  и отметка вершины  $r_E^1$  равна  $x_i$ .

Предположим  $s_B^2 \notin \{t_2, t_1\}$ . Тогда из формулы 2.2 следует, что значение функции  $\psi_i(s_A^1, p^1)$  принадлежит  $S_A \times P(i)$ . Пусть  $\psi_i(s_A^1, p^1) = (s, p)$ . Тогда

$$s_B^2 = \delta_B(s_B^1, x_i) = (\delta_A(s, p), \delta_{i1}(p, y), \dots, \delta_{in}(p, y)),$$

где  $y = \lambda_A(s, p)$ . С другой стороны, по определению  $\psi_i$ , значение функции  $\psi_i(s_A^1, p^1) = (s, p)$  означает, что акцептор  $A_{s_0, s_1}$ , ни разу не побывав в заключительной конфигурации, за конечное число шагов перейдет из  $K_A^1$  в конфигурацию

$$K_A^2 = [\delta_A(s, p), (\delta_{ij}(p, y), \delta_E(r_E, y))],$$

где  $y = \lambda_A(s, p)$  и  $j$  такое, что  $x_j$  является отметкой вершины  $\delta_E(r_E, y)$ . Прямо из определения следует, что  $K_A^2$  и  $K_B^2$  адекватные конфигурации. Таким образом, свойство 1 доказано.

Предположим  $s_B^2 = t_1$ . Тогда  $\psi_i(s_A^1, p^1) = (s_1, -)$ , а это значит, что  $A_{s_0, s_1}$ , взаимодействуя со средой  $J_e$  из конфигурации  $K_A^1$ , достигнет заключительной конфигурации. Свойство 2 доказано.

Предположим  $s_B^2 = t_2$ , тогда  $\psi_i(s_A^1, p^1) = (-, -)$ , а это значит, что акцептор  $A_{s_0, s_1}$  никогда не достигнет из  $K_A^1$  заключительной конфигурации. Свойство 3 доказано.

Из леммы 2.3.4 вытекает следующее простое следствие.

**Следствие 2.3.1** Пусть  $K_A$  и  $K_B$  — адекватные конфигурации соответственно акцепторов  $A_{s_0, s_1}$  и  $B_{t_0, t_1}$ . Тогда,  $A_{s_0, s_1}$  достигнет из  $K_A$  заключительного состояния в том и только том случае, если  $B_{t_0, t_1}$  достигнет заключительного состояния из  $K_B$ .

**Доказательство.** Рассмотрим произвольную траекторию

$$K_B^1 K_B^2 \dots K_B^m \in \text{Tr}_{BE}(K_B),$$

где  $K_B^1 = K_B$ , такую, что ни одна из конфигураций  $K_B^j$ ,  $1 \leq j \leq m$ , не является заключительной и не соответствует состоянию  $t_2$ , т.е. не имеет вид  $[t_2, r_E]$ . Тогда, по лемме 2.3.4, существует подпоследовательность конфигураций

$$K_A^{i_1} K_A^{i_2} \dots K_A^{i_m}$$

последовательности

$$K_A^1 K_A^2 \dots K_A^{i_m} \in \text{Tr}_{AJ_e}(K_A),$$

где  $K_A^1 = K_A$  и  $1 = i_1 < i_2 < \dots < i_m$ , такая, что  $K_A^{i_j}$  и  $K_B^j$  являются адекватными,  $1 \leq j \leq m$ . Кроме того, для всех  $j < i_m$   $K_A^j$  не являются заключительными конфигурациями. Заключительной может оказаться конфигурация  $K_A^{i_m}$ , но тогда, в силу леммы 2.3.4, будет заключительной  $K_B^{m+1}$ . Более того, если  $K_B^{m+1}$  действительно является заключительной конфигурацией, то, по лемме 2.3.4, имеем, что из  $K_A^{i_m}$  акцептором  $A_{s_0, s_1}$  достигается состояние  $s_1$ . Если же конфигурация  $K_B^{m+1}$  соответствует состоянию  $t_2$ , т.е. имеет вид  $[t_2, r_E]$ , то из  $K_A^{i_m}$  никогда не достижимо заключительное состояние. Из всего вышесказанного вытекает следующее.

Пусть  $m$  — наименьшее число такое, что  $K_B^m$  является либо заключительной конфигурацией, либо соответствует состоянию  $t_2$ . Тогда в первом случае  $A_{s_0, s_1}$  достигнет из  $K_A$  заключительного состояния, во втором нет. Если такого  $m$  не существует, то  $A_{s_0, s_1}$  не достигнет из  $K_A$  заключительного состояния. Следствие доказано.

**Доказательство теоремы 2.3.1.** Предположим акцептор  $A_{s_0, s_1}$  достигает при взаимодействии с  $J_e$  заключительного состояния. Следовательно, существует такая начальная конфигурация  $[s_0, (r, r_E)]$ , из которой достижима какая-либо заключительная. Покажем, что в классе  $\mathcal{B}(e)$  найдется акцептор  $B_{t_0, t_1}$ , который из начальной конфигурации  $[t_0, r_E]$  также достигнет заключительную.

Предположим вершина  $r_E$  имеет отметку  $x_i$ . Рассмотрим взаимодействие  $A_{s_0, s_1}$  с вершиной  $r$  среды  $F_e(i)$ . Автомат  $A$  и среда  $F_e(i)$  в общем случае несовместимы. Поэтому здесь возможны две конечных ситуации: либо акцептор достигнет заключительного состояния, либо окажется в некотором тупике  $[s, p]$ , где  $s \in S_A$ ,  $p \in P(i)$  и  $\lambda_A(s, p)$ .

В первом случае из  $\mathcal{B}(e)$  выбираем акцептор  $B_{t_0, t_1}$ , который был построен по набору  $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_n) \in \Theta_e$  такому, что  $\theta_i = (s_1, -)$ . Такой акцептор на первом же шаге перейдет из  $[t_0, r_E]$  в заключительное состояние. Таким образом, первый случай исчерпан.

Во втором случае выберем акцептор  $B_{t_0, t_1}$  такой, что  $\theta_i = (s, p)$ . Рассмотрим конфигурацию

$$K_A = [\delta_A(s, p), (\delta_{ij}(p, y), \delta_E(r_E, y))],$$

в которую переходит за один шаг акцептор  $A_{s_0, s_1}$  из конфигурации  $[s, (p.r_E)]$ , где  $y = \lambda_A(s, p)$  и  $j$  такое, что  $x_j = \lambda_E(r_E)$ . В силу определения  $B_{t_0, t_1}$ , а именно формул 2.3 и 2.4, акцептор  $B_{t_0, t_1}$  переходит за один шаг из конфигурации  $[t_0, r_E]$  в конфигурацию

$$K_B = [(\delta_A(s, p), \delta_{i1}(p, y), \dots, \delta_{in}(p, y)), \delta_E(r_E, y)].$$

По определению,  $K_A$  и  $K_B$  являются адекватными. Таким образом, в силу следствия 2.3.1 и того, что  $A_{s_0, s_1}$  достигает заключительного состояния, акцептор  $B_{t_0, t_1}$  также достигает заключительного состояния.

Обратно, пусть некоторый акцептор  $B_{t_0, t_1}$  из  $\mathcal{B}(e)$  достигает при взаимодействии с  $E$  заключительного состояния. Следовательно, существует такая начальная конфигурация  $[t_0, r_E]$ , из которой достижима заключительная. Предположим  $r_E$  имеет отметку  $x_i$ . Пусть  $B_{t_0, t_1}$  построен по набору  $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_n) \in \Theta_e$ . Рассмотрим все различные варианты значений  $\theta_i = (-, -)$ ,  $\theta_i = (s_1, -)$ ,

$\theta_i \in S_A \times P(i)$ . Случай  $\theta_i = (-, -)$  невозможен, поскольку тогда  $B_{t_0, t_1}$  сразу перейдет из  $[t_0, r_E]$  в состояние  $t_2$ , из которого не достижимо заключительное  $t_1$ .

Второй случай  $\theta_i = (s_1, -)$  прямо по определению говорит о том, что найдется начальная конфигурация акцептора  $A_{s_0, s_1}$  и среды  $J_e$ , из которой достигается заключительное состояние.

Рассмотрим подробнее случай  $\theta_i \in S_A \times P(i)$ . Пусть  $\theta_i = (s, p)$ . Отсюда следует, что найдется такая вершина  $(r, r_E)$  среды  $J_e$ , что  $A_{s_0, s_1}$  из конфигурации  $[s_0, (r, r_E)]$  достигнет конфигурацию  $[s, (p, r_E)]$ . Из определения среды  $J_e$  следует, что из конфигурации  $[s, (p, r_E)]$  акцептор  $A_{s_0, s_1}$  за один шаг перейдет в конфигурацию

$$K_A = [\delta_A(s, p), (\delta_{ij}(p, y), \delta_E(r_E, y))],$$

где  $y = \lambda_A(s, p)$  и  $j$  такое, что  $x_j$  является отметкой вершины  $\delta_E(r_E, y)$ . С другой стороны, акцептор  $B_{t_0, t_1}$  переходит из конфигурации  $[t_0, r_E]$  в конфигурацию

$$K_B = [(\delta_A(s, p), \delta_{i_1}(p, y), \dots, \delta_{i_n}(p, y)), \delta_E(r_E, y)],$$

где  $y = \lambda_A(s, p)$ . По определению, конфигурации  $K_A$  и  $K_B$  являются адекватными. В силу следствия 2.3.1 и того, что  $B_{t_0, t_1}$  достигает заключительного состояния, акцептор  $A_{s_0, s_1}$  также достигнет заключительного состояния.

Теорема 2.3.1 доказана.

Из теоремы 2.3.1 вытекают следующие простые следствия.

**Следствие 2.3.2** *Среда, полученная одномерным преобразованием вершин эффективной среды, является эффективной.*

**Доказательство.** Утверждение следует из леммы 2.3.3 и теоремы 2.3.1.

**Следствие 2.3.3** *Среда, полученная объединением одномерных преобразований вершин эффективной среды, является эффективной.*

**Доказательство.** Утверждение вытекает из следствия 2.3.2 и того, что конечное объединение эффективных сред, по следствию 2.1.2, дает эффективную среду.

Примеры геометрических сред, доказательство эффективности которых основывается на результатах этого раздела, будут даны в разделе 3.2.

## 2.4 Двумерное преобразование вершин среды

В данном разделе рассмотрено двумерное преобразование вершин среды. Найдено достаточное условие (теорема 2.4.1), когда преобразование переводит эффективную среду в эффективную. Результат используется в разделе 3.3, где рассмотрен частный случай данного преобразования, при котором указанное условие проверяется конструктивно.

Напомним, что двумерным преобразованием вершин среды  $E$  называется такое преобразование по заданным  $\mathcal{F}$ ,  $\mathcal{P}$ ,  $\Delta$ ,  $I$ , при котором множество наборов индексов  $I$  счетно.

Пусть среда  $J$  получена таким преобразованием из  $E$ . Рассмотрим произвольный акцептор  $A_{s_0, s_1}$ , совместимый с  $J$ . Пусть класс акцепторов  $\mathcal{B}(e)$ ,  $e \in I$ , получен из  $A_{s_0, s_1}$  преобразованием, сопряженным с одномерным преобразованием среды  $E$  в среду  $J_e$ . Обозначим через  $\mathcal{B}(I)$  класс акцепторов, равный объединению классов  $\mathcal{B}(e)$  по всем  $e \in I$ . Будем говорить, что класс  $\mathcal{B}(I)$  получен из  $A_{s_0, s_1}$  преобразованием, сопряженным с двумерным преобразо-

ванием вершин среды  $E$ . В силу того, что все среды из классов  $\mathcal{B}(e)$ ,  $e \in I$ , имеют одинаковые множества состояний

$$S_A \times P(1) \times \dots \times P(n) \bigcup \{t_0, t_1, t_2\}$$

и одинаковые входные и выходные алфавиты, получаем, что класс  $\mathcal{B}(I)$  конечен. Отсюда и из теоремы 2.3.1 вытекает, что для эффективности преобразованной среды  $J$  достаточно эффективности исходной среды  $E$  и существования алгоритма построения класса  $\mathcal{B}(I)$  по произвольному акцептору  $A_{s_0, s_1}$ . В данном разделе выводится достаточное условие существования такого алгоритма и, следовательно, эффективности среды  $J$ . В разделе 3.3 построен пример класса сред, эффективность которого доказывается на основе результата настоящего раздела.

Рассмотрим произвольный акцептор  $A_{s_0, s_1}$ , совместимый со средой  $J$ . Зафиксируем число  $i$ ,  $1 \leq i \leq n$ , где  $n$  равно количеству символов в алфавите  $X$  отметок вершин среды  $E$ . Пусть произвольное  $v$  принадлежит множеству  $S_A \times P(i) \bigcup \{(s_0, -)\}$ , а  $w$  принадлежит  $S_A \times P(i) \bigcup \{(s_1, -), (-, -)\}$ . На  $w$  налагается одно ограничение: если  $w \in S_A \times P(i)$ ,  $w = (s, p)$ , то необходимо, чтобы  $\lambda_A(s, p) \in Y$ , т.е. конфигурация  $[s, p]$  акцептора  $A_{s_0, s_1}$  и любой среды из класса  $\mathcal{F}(j)$ ,  $1 \leq j \leq n$ , должна быть тупиковой.

Определим некоторое подмножество  $I(i, (v, w)) \subseteq I(i)$  индексов сред класса  $\mathcal{F}(i)$ . Индекс  $k$  принадлежит  $I(i, (v, w))$  в том и только том случае, если при взаимодействии  $A_{s_0, s_1}$  и среды  $F_k(i) \in \mathcal{F}(i)$  выполняются следующие условия. Рассмотрим отдельно два случая  $v \in S_A \times P(i)$  и  $v = (s_0, -)$ .

Предположим  $v \in S_A \times P(i)$ ,  $v = (s, p)$ , тогда 1) если  $w \in S_A \times P(i)$ ,  $w = (s', p')$ , то траектория  $\text{Tr}([s, p])$  заканчивается тупиком  $[s', p']$  и не содержит заключительную конфигурацию; 2) если  $w = (s_1, -)$ , то траектория  $\text{Tr}([s, p])$  содержит заключитель-

ную конфигурацию; 3) если  $w = (-, -)$ , то траектория  $\text{Tr}([s, p])$  не заканчивается тупиком и не содержит заключительную конфигурацию.

Предположим  $v = (s_0, -)$ . Тогда 1) если  $w \in S_A \times P(i)$ ,  $w = (s, p)$ , то найдется такая начальная конфигурация  $[s_0, r]$ , что траектория  $\text{Tr}([s_0, r])$  заканчивается тупиком  $[s, p]$  и не содержит заключительную конфигурацию; 2) если  $w = (s_1, -)$ , то найдется такая начальная конфигурация  $[s_0, r]$ , что траектория  $\text{Tr}([s_0, r])$  содержит заключительную конфигурацию; 3) если  $w = (-, -)$ , то траектория  $\text{Tr}([s_0, r])$ , где  $[s_0, r]$  — любая начальная конфигурация, не заканчивается тупиком и не содержит заключительную конфигурацию.

Определение индексов  $I(i, (v, w))$  закончено,  $1 \leq i \leq n$ .

Пусть теперь  $\psi_i$  — произвольная всюду определенная функция

$$\psi_i : S_A \times P(i) \rightarrow S_A \times P(i) \bigcup \{(s_1, -), (-, -)\},$$

и  $\theta_i$  — произвольное подмножество множества

$$S_A \times P(i) \bigcup \{(s_1, -), (-, -)\},$$

$1 \leq i \leq n$ . На  $\theta_i$  накладывается одно ограничение: либо  $\theta_i$  не содержит символа  $(-, -)$ , либо  $\theta_i = \{(-, -)\}$ . В силу конечности используемых алфавитов, различных функций  $\psi_i$  и множеств  $\theta_i$  может быть только конечное число. Обозначим теперь через  $I(i, \psi_i, \theta_i)$  следующее множество индексов:

$$I(i, \psi_i, \theta_i) = \bigcap I(i, (v, w)),$$

где пересечение выполняется по всевозможным парам  $(v, w)$ , где  $v \in S_A \times P(i) \bigcup \{s_0, -\}$ , таким, что если  $v \in S_A \times P(i)$ , то  $w = \psi_i(v)$ , и, если  $v = (s_0, -)$ , то  $w \in \theta_i$ .

**Теорема 2.4.1** *Для того, чтобы среда  $J$ , полученная двумерным преобразованием вершин эффективной среды  $E$  по заданным  $\mathcal{F}(i)$ ,  $\mathcal{P}(i)$ ,  $\Delta$ ,  $I$ ,  $1 \leq i \leq n$ , была эффективной, достаточно, чтобы для произвольного акцептора, совместимого с  $J$ , и произвольных, построенных по этому акцептору, функций  $\psi_i$  и множеств  $\theta_i$ ,  $1 \leq i \leq n$ , была алгоритмически разрешима проблема пустоты множества*

$$I \bigcap I(1, \psi_1, \theta_1) \times I(2, \psi_2, \theta_2) \times \dots \times I(n, \psi_n, \theta_n).$$

**Доказательство.** Действительно, из определения  $\psi_i$  и  $\theta_i$ ,  $1 \leq i \leq n$ , следует, что

$$e \in I \bigcap I(1, \psi_1, \theta_1) \times I(2, \psi_2, \theta_2) \times \dots \times I(n, \psi_n, \theta_n)$$

в том и только том случае, если  $\psi_i$  является функцией окончания взаимодействия  $A_{s_0, s_1}$  и  $F_e(i)$  из конфигураций  $S_A \times P(i)$ , и  $\theta_i$  является множеством окончаний взаимодействия  $A_{s_0, s_1}$  и  $F_e(i)$  из начальных конфигураций (см. раздел 2.3),  $1 \leq i \leq n$ . И поскольку класс акцепторов  $\mathcal{B}(e)$ , полученный из  $A_{s_0, s_1}$  преобразованием, сопряженным с одномерным преобразованием вершин среды  $E$  по  $F_e(i) \in \mathcal{F}(i)$ ,  $P(i)$ ,  $\delta_{ij}$ ,  $1 \leq i, j \leq n$ , однозначно определяется функциями  $\psi_i$  и множествами  $\theta_i$ ,  $1 \leq i \leq n$ , то для любых  $e'$  и  $e''$  таких, что

$$e', e'' \in I' = I \bigcap I(1, \psi_1, \theta_1) \times I(2, \psi_2, \theta_2) \times \dots \times I(n, \psi_n, \theta_n),$$

имеем  $\mathcal{B}(e') = \mathcal{B}(e'') = \mathcal{B}(I')$ . Следовательно, чтобы построить класс акцепторов  $\mathcal{B}(I)$ , достаточно перебрать всевозможные различные наборы функций  $\psi_i$  и множеств  $\theta_i$ ,  $1 \leq i \leq n$ , проверить для них пустоту множества

$$I' = I \bigcap I(1, \psi_1, \theta_1) \times I(2, \psi_2, \theta_2) \times \dots \times I(n, \psi_n, \theta_n),$$

и, если оно непусто, построить класс  $\mathcal{B}(I')$ . Объединив далее все построенные таким образом классы  $\mathcal{B}(I')$ , получим класс  $\mathcal{B}(I)$ . Теорема доказана.

## Глава 3

# Эффективные и неэффективные среды

Настоящая глава посвящена построению эффективных геометрических сред. В первом разделе найден вид сред, которые можно задавать в виде специальных формул. Для этих сред, названных лентами, полностью решена задача определения их эффективности. Исследование лент проведено независимо от основных результатов предыдущей части работы. В последующих двух разделах с помощью преобразования лент доказана эффективность различных классов  $m$ -мерных геометрических сред,  $m \leq 2$ . И, наконец, в последнем разделе приведены примеры простых, но эффективных геометрических сред.

### 3.1 Ленты

В разделе предложен метод задания некоторых сред формулами в виде формальных языков. Для таких сред найден критерий их эффективности и достаточные условия конструктивной проверки этого критерия.

Две различные вершины произвольной среды назовем инцидентными, если существует переход из одной из них в другую, т.е. для одной из этих вершин и некоторого входного сигнала опреде-

лено значение функции переходов, которое равно другой из рассматриваемых вершин. Конечную правильную среду  $E$  назовем лентой, если все ее вершины можно расположить в последовательность  $r_1 r_2 \dots r_k$  такую, что все инцидентные в среде вершины в последовательности стоят рядом. Здесь  $k$  — число вершин данной среды. Ясно, что если такая последовательность существует, то она не единственная с таким указанным свойством. Например, члены исходной последовательности можно расположить в обратном порядке. Зафиксируем одну из таких последовательностей  $r_1 \dots r_i r_{i+1} \dots r_k$  вершин ленты  $E$ . Тогда назовем  $r_1$  левой границей и, соответственно,  $r_k$  — правой границей ленты  $E$ . Договоримся называть каждый переход, ведущий из вершины  $r_i$  в вершину  $r_{i+1}$ , движением, приближающим к правой границе, или, просто, движением вправо, и переход из  $r_{i+1}$  в  $r_i$  движением, приближающим к левой границе, или движением влево,  $1 \leq i < k$ ; переходы, ведущие из вершины в эту же вершину, назовем движениями на месте.

Пусть задан произвольный, конечный или бесконечный, класс  $\mathcal{E}$  лент; пусть правильная среда  $E$  представляет собой объединение лент этого класса. Класс лент  $E$  назовем каноническим, если существует взаимно-однозначное соответствие между входным алфавитом среды и направлениями движений, т.е. если, во-первых, входной алфавит среды  $E$  содержит не более трех символов, обозначим их, например, через  $L$ ,  $R$ ,  $S$ , и, во-вторых, можно зафиксировать указанные выше последовательности вершин лент так, что каждый переход по входному сигналу  $L$  будет движением влево, по  $R$  — движением вправо и по  $S$  — движением на месте. Однако вместо символов  $L$  и  $R$  можно использовать любые другие обозначения, например,  $U$  и  $D$ , или  $+1$  и  $-1$ , и говорить, например, не ”вправо” и ”влево”, а ”вверх” и ”вниз”.

Рассмотрим произвольный, не являющийся каноническим, класс лент  $\mathcal{E}$ . Определим преобразование каждой ленты  $E$  этого класса в каноническую (ниже, преобразованную ленту  $E$  будем обозначать через  $H$  и, соответственно, преобразованный класс  $\mathcal{E}$  будем обозначать через  $\mathcal{H} = (R_{\mathcal{H}}, W, U, \delta_{\mathcal{H}}, \lambda_{\mathcal{H}})$ ). Зафиксируем для каждой ленты  $E$  из  $\mathcal{E}$  последовательность вершин, указанную в определении лент. Изменим отметку  $x$  каждой вершины  $r$  ленты  $E$  на отметку, являющуюся следующей последовательностью символов  $x(y_1, w_1; y_2, w_2; \dots; y_m, w_m)$ , где  $y_i$ ,  $1 \leq i \leq m$ , есть все те входные сигналы среды  $\mathcal{E}$ , по которым определен переход из вершины  $r$ , а  $w_i$ ,  $1 \leq i \leq m$ , есть символы из алфавита  $\{L, R, S\}$ , и определяются  $w_i$  следующим образом:  $w_i$  равен  $L$ , если переход из вершины  $r$  по входному сигналу  $y_i$  приближает к левой границе ленты  $E$ , равен  $R$ , если к правой границе, и равен  $S$ , если переход соответствует движению на месте. Договоримся, что порядок следования пар  $(y_i, w_i)$  в скобках введенной отметки не существен, т.е. отметки вершин  $r$  и  $r'$  ленты  $H$  совпадают, если отметки этих же вершин в ленте  $E$  также совпадают и при этом по одному и тому же входному сигналу переходы из  $r$  и  $r'$  в ленте  $E$  идут в одном направлении. Мы определили выходной алфавит и выходную функцию ленты  $H$ . Входной алфавит  $W$  лент класса  $\mathcal{H}$  полагаем равным  $\{L, R, S\}$ . Из вершины  $r$  с отметкой  $x(y_1, w_1; \dots; y_m, w_m)$  в ленте  $H$  переход по входному сигналу  $w \in \{L, R, S\}$  определен в том и только том случае, если в скобках хотя бы один из символов  $w_i$ ,  $1 \leq i \leq m$ , равен  $w$ . При этом этот переход приближает к правой или левой границе, или является движением на месте в соответствии с уже определенным выше значением входных сигналов  $L, R, S$ . Таким образом, закончено построение ленты  $H$  и соответственно класса  $\mathcal{H}$ .

По построению  $\mathcal{H}$  является каноническим классом лент.

Будем говорить, что класс  $\mathcal{H}$  получен из  $\mathcal{E}$  преобразованием к каноническому виду. Рассмотрим теперь произвольный акцептор  $A_{s_0, s_1}$ , совместимый со средой  $\mathcal{E}$ . Преобразуем его в некоторый акцептор  $B_{t_0, t_1} = (S_B, U, W, \delta_B, \lambda_B, t_0, t_1)$ , совместимый со средой  $\mathcal{H}$ . Множество состояний  $S_B$  полагаем равным множеству состояний  $S_A$  автомата  $A$ . Пусть произвольный символ  $x'$  из  $U$  имеет вид  $x(y_1, w_1; \dots; y_m, w_m)$ . Полагаем значение функции переходов  $\delta_B(s, x')$  равным  $\delta_A(s, x)$ , а значение функции выходов  $\lambda_B(s, x')$  равным  $w_i$ , где  $i$  такое, что  $\lambda_A(s, x) = y_i$ ,  $1 \leq i \leq m$ . Акцептор  $B_{s_0, s_1}$  полностью определен. Будем говорить, что  $B_{s_0, s_1}$  получен из  $A_{s_0, s_1}$  преобразованием, сопряженным с преобразованием к каноническому виду класса лент  $\mathcal{E}$ . Это преобразование сохраняет множество состояний автомата  $A$ . Легко видеть, что  $A$  и  $B$ , находящиеся в равных состояниях и взаимодействующие с одноименными вершинами соответственно сред  $\mathcal{E}$  и  $\mathcal{H}$ , имеют совпадающие значения функций переходов. Более того, они совершают такое движение на средах, что каждый раз на следующем шаге взаимодействия они оказываются опять в одноименных вершинах сред  $\mathcal{E}$  и  $\mathcal{H}$ . Отсюда следует утверждение:

**Лемма 3.1.1** *Пусть  $A_{s_0, s_1}$  — акцептор, совместимый с классом лент  $\mathcal{E}$ . Пусть класс лент  $\mathcal{H}$  получен из  $\mathcal{E}$  преобразованием к каноническому виду и акцептор  $B_{s_0, s_1}$  получен из  $A_{s_0, s_1}$  преобразованием, сопряженным с данным преобразованием. Тогда акцептор  $A_{s_0, s_1}$  при взаимодействии с  $\mathcal{H}$  достигнет заключительного состояния в том и только том случае, если акцептор  $B_{s_0, s_1}$  при взаимодействии с  $\mathcal{H}$  также достигнет заключительного состояния.*

**Следствие 3.1.1** *Пусть класс лент  $\mathcal{H}$  получен из класса лент  $\mathcal{E}$  преобразованием к каноническому виду. Тогда, если среда  $\mathcal{H}$  эф-*

эффективная, то среда  $\mathcal{E}$  также эффективная.

Ограничимся далее рассмотрением только канонических классов лент.

Пусть  $\mathcal{E}$  — произвольный канонический класс лент. Рассмотрим произвольную ленту  $E$  из  $\mathcal{E}$ . Пусть  $r_1 r_2 \dots r_k$  — последовательность ее вершин такая, что все переходы в ней по сигналу  $L$  ведут влево, по  $R$  — вправо, и по  $S$  — на месте. Поставим в соответствие ленте  $E$  слово

$$\lambda_{\mathcal{E}}(r_1)\lambda_{\mathcal{E}}(r_2)\dots\lambda_{\mathcal{E}}(r_k)$$

в алфавите  $X$ . Это слово назовем формулой ленты  $E$ . Совокупность формул всех лент, составляющих класс  $\mathcal{E}$ , образует язык. Обозначим его через  $\Phi(\mathcal{E})$ . Назовем  $\Phi(\mathcal{E})$  формулой среды  $\mathcal{E}$ .

Пусть акцептор  $A_{s_0, s_1} = (S_A, X, Y, \delta_A, \delta_A, s_0, s_1)$  совместим со средой  $\mathcal{E}$ . Преобразуем акцептор  $A_{s_0, s_1}$  в одноленточную машину Тьюринга  $MT(A) = (S_A, X, \delta_{MT(A)}, s_0, s_1)$ , где  $S_A$  — множество ее состояний,  $X$  — внешний алфавит, т.е. алфавит, в котором записываются слова на ленте машины Тьюринга,  $s_0$  и  $s_1$  начальное и заключительное состояния,  $\delta_{MT(A)}$  — отображение, ставящее в соответствие текущему состоянию машины Тьюринга и символу, который обозревает считывающая головка, новое состояние и направление движения считывающей головки :  $R$  — вправо,  $L$  — влево,  $S$  — на месте. При этом

$$\delta_{MT(A)}(s, x) = (\delta_A(s, x), \lambda_A(s, x)).$$

Из определения следует, что  $MT(A)$  не имеет записывающей головки, т.е. только считывает содержимое своей ленты.

Определим язык, который допускает  $MT(A)$ . Произвольное слово  $x_1 x_2 \dots x_k$  в алфавите  $X$  допускается машиной Тьюринга  $MT(A)$ , если существует такое  $i$ ,  $1 \leq i \leq k$ , что она из конфигурации  $x_1 \dots x_{i-1} s_0 x_i \dots x_k$  приходит в заключительное состояние ни

разу не обозревая пустую клетку справа или слева от указанного слова. Множество всех допустимых машиной Тьюринга  $MT(A)$  слов назовем языком, допускаемым  $MT(A)$ , и обозначим его через  $M(A)$ . Следующая теорема охарактеризует язык  $M(A)$ .

**Теорема 3.1.1** *Язык, который допускает машина Тьюринга без записывающей головки, является регулярным. Кроме того, существует алгоритм задания этого языка формулой (например, в алгебре Клини).*

Перед тем как приступить к доказательству сделаем замечание, что теорема 3.1.1 по своей сути совпадает с известной теоремой Шепердсона [28] и отличается от нее лишь условием, при котором машина Тьюринга допускает слово. Такое различие не меняет идеи доказательства и поэтому оно большей частью будет дословно повторять доказательство Шепердсона. Далее понадобится следующее утверждение.

**Теорема 3.1.2 (Майхил [26,с.99])** *Произвольный язык  $M$  в алфавите  $X$  является регулярным тогда и только тогда, когда множество  $X^*$  всех слов в алфавите  $X$  разбивается на конечное число классов посредством отношения конгруэнтности  $\rho_M$ , определяемого следующим образом: слова  $w_1$  и  $w_2$  в алфавите  $X$  находятся в отношении  $\rho_M$  в том и только том случае, если для любых слов  $w'$  и  $w''$  в алфавите  $X$  имеем  $w'w_1w'' \in M$  тогда и только тогда, когда  $w'w_2w'' \in M$ .*

Кроме того, если  $\rho_M$  — отношение, определенное в теореме Майхилла, то для любого регулярного языка  $M$  существует алгоритм задания его в виде формулы (например, в алгебре Клини) по следующим исходным данным: 1) способ выяснить для каждого слова  $w$  принадлежит ли  $w$  языку  $M$ , 2) верхняя граница  $N$  для числа

классов эквивалентностей, определяемых отношением  $\rho_M$  на  $X^*$ . Доказательство этого факта можно найти, например, в [26].

**Доказательство теоремы 3.1.1.** Пусть

$$MT = (S_{MT}, X, \delta, s_0, s_1)$$

произвольная машина Тьюринга, не меняющая содержимое ленты. Пусть  $M$  — язык, допускаемый  $MT$ . Каждому слову  $p$  из  $X^*$  поставим в соответствие множество  $\nu_p \subseteq \{L, R\} \times S_{MT} \cap \{+\}$  и функцию  $\theta_p : \{L, R\} \times S_{MT} \rightarrow \{L, R\} \times S_{MT} \cap \{-, +\}$ . Символ  $+$  принадлежит  $\nu_p$ , если слово  $p$  допускается  $MT$ . Пара  $(w, s)$ , где  $w \in \{L, R\}$ ,  $s \in S_{MT}$ , принадлежит  $\nu_p$ , если существует такая конфигурация  $p's_0p''$ , где  $p'p'' = p$  и  $p''$  не является пустым словом, что  $MT$ , начиная работу из этой конфигурации, впервые обозревает пустую клетку справа или слева от слова  $p$ , находясь в состоянии  $s$  (если слева, то  $w = L$ , если справа, то  $w = R$ ). Значение функции  $\theta_p(w, s)$  дает результат работы  $MT$ , если она начинает действовать в состоянии  $s$ , считывая при этом крайний символ слова  $p$  (слева при  $w = L$  и справа при  $w = R$ ). А именно,  $\theta_p(w, s) = -$ , если  $MT$  не приходит в заключительное состояние и не обозревает пустые клетки;  $\theta_p(w, s) = +$ , если  $MT$  приходит в заключительное состояние, при этом ни разу не оказавшись в пустой клетке;  $\theta_p(w, s) = (w', s')$ , если впервые оказывается в пустой клетке справа или слева от слова  $p$ , находясь в состоянии  $s'$ , при этом  $w' = L$ , если в пустой клетке слева и  $w' = R$ , если справа. Из определений следует, что если для слов  $p_1$  и  $p_2$  выполняется  $\nu_{p_1} = \nu_{p_2}$  и  $\theta_{p_1} = \theta_{p_2}$ , то  $p_1$  и  $p_2$  находятся в отношении  $\rho_M$ , определенном в теореме Майхилла. Однако, если  $n$  есть число состояний в  $MT$ , то существует по крайней мере  $2^{2n+1}$  различных множеств  $\nu_p$  и  $(2n + 2)^{2n}$  различных функций  $\theta_p$ . Таким образом, множество  $X^*$  разбивается на конечное число классов посредством отношения

$\rho_M$ , и верхняя граница числа таких классов равна  $2^{2n+1} \cdot (2n+2)^{2n}$ . Следовательно,  $M$  является регулярным языком. Для завершения доказательства того, что язык  $M$  можно задать в виде формулы, например, в алгебре Клини, нужен способ выяснить для каждого слова  $p$ , принадлежит ли  $p$  языку  $M$ , или, другими словами, допускает ли  $MT$  слово  $p$ . Такой способ есть, т.к. достаточно запустить машину  $MT$  из всех  $\|p\|$  возможных начальных конфигураций, где  $\|p\|$  — длина слова  $p$ , и смотреть что при этом произойдет. Если в течение  $\|p\| \cdot n$  единиц времени для каждой конфигурации машина не остановится, то должна повторяться некоторая комбинация состояний машины  $MT$  и считываемых ячеек ленты, так что  $MT$  будет выполнять безостановочный цикл и слово  $p$  никогда не будет допущено.

Теорема доказана.

Следующая теорема подводит нас к критерию эффективности произвольного канонического класса лент.

**Теорема 3.1.3** Пусть акцептор  $A_{s_0, s_1}$  совместим с каноническим классом лент  $\mathcal{E}$ . Тогда он, при взаимодействии с  $\mathcal{E}$ , достигнет заключительного состояния в том и только том случае, если пересечение языков  $\Phi(\mathcal{E})$  и  $M(A)$  не пусто.

**Доказательство.** По построению акцептор  $A_{s_0, s_1}$  и машина Тьюринга  $MT(A)$ , находящиеся в равных состояниях, переходят в равные состояния и движутся в одинаковом направлении, если входной сигнал акцептора совпадает с символом, считываемым головкой машины Тьюринга. Следовательно, если акцептор взаимодействует с вершиной  $r_i$  ленты из  $\mathcal{E}$ , заданной формулой  $\lambda_{\mathcal{E}}(r_1) \dots \lambda_{\mathcal{E}}(r_i) \dots \lambda_{\mathcal{E}}(r_k)$ , и машина Тьюринга  $MT(A)$  начинает работу из конфигурации  $x_1 \dots x_{i-1} s_0 x_i \dots x_k$ , где  $s_0$  — начальное состояние,  $x_j = \lambda_{\mathcal{E}}(r_j)$ ,  $1 \leq j \leq k$ , то они, акцептор и машина

Тьюринга, достигнут или не достигнут заключительного состояния только вместе. Теорема доказана.

**Следствие 3.1.2** *Канонический класс лент  $\mathcal{E}$  эффективен в том и только том случае, если существует алгоритм, который для любого акцептора  $A$ , совместимого с  $\mathcal{E}$ , проверяет пустоту языка  $M(A) \cap \Phi(\mathcal{E})$ .*

Доказательство очевидно вследствие предыдущего результата.

**Следствие 3.1.3** *Канонический класс лент  $\mathcal{E}$  эффективен в том и только том случае, если существует алгоритм, который для любого регулярного языка  $M$  в алфавите отметок вершин среды  $\mathcal{E}$  проверяет пустоту множества  $M \cap \Phi(\mathcal{E})$ .*

Доказательство очевидно в силу следствия 3.1.2 и того, что для любого регулярного языка существует машина Тьюринга без записывающей головки, которая его допускает.

Следующее утверждение выделяет некоторые эффективные классы лент.

**Следствие 3.1.4** *Если формула канонического класса лент  $\mathcal{E}$  представляет собой контекстно-свободный язык, то среда  $\mathcal{E}$  является эффективной.*

**Доказательство.** Поскольку проблема пустоты пересечения регулярного и контекстно-свободного языков алгоритмически разрешима [7], то из следствия 3.1.3 вытекает требуемое утверждение. Следствие доказано.

Рассмотрим следующий канонический класс лент  $\mathcal{E}$ . Пусть он имеет выходной алфавит  $\{\vdash, +, \dashv\}$  и задан формулой  $\vdash +^* \dashv$ . При этом пусть выполняются условия: из вершин с отметкой  $\vdash$  не определен переход только по сигналу  $L$ ; из вершин с отметкой  $\dashv$  не определен переход только по сигналу  $R$ ; из вершин с отметкой  $+$

переходы определены по всем входным сигналам. Ясно, что среда  $\mathcal{E}$  эффективная, поскольку ее формула представляет собой регулярный язык. Этот класс рассматривался в [8], где доказана его эффективность, но результат получен другим методом.

И, наконец, еще одно простое следствие.

**Следствие 3.1.5** *Пусть класс лент  $\mathcal{E}$  задан формулой  $\Phi(\mathcal{E})$ , и акцептор  $A_{s_0, s_1}$  совместим с  $\mathcal{E}$ . Пусть класс лент  $\mathcal{E}' \subseteq \mathcal{E}$  такой, что лента  $E \in \mathcal{E}$  принадлежит  $\mathcal{E}'$  в том и только том случае, если  $A_{s_0, s_1}$  при взаимодействии с  $E$  достигнет заключительного состояния. Тогда формула лент  $\mathcal{E}'$  получается пересечением  $\Phi(\mathcal{E})$  с регулярным языком  $M(A)$ .*

## 3.2 Одномерные квазиленты

Среду назовем одномерной квазилентой, если ее можно получить одномерным преобразованием вершин некоторой ленты. В данном разделе одномерные квазиленты будем просто называть квазилентами. Если класс квазилент  $\mathcal{J}$  получен из эффективного класса лент, то по следствию 2.3.2 среда  $\mathcal{J}$  является эффективной. Таким образом, следствие 2.3.2 дает достаточное условие эффективности одномерных квазилент. Цель данного раздела построить на основе этого результата примеры эффективных классов геометрических сред.

Обозначим через  $Z^m$  множество, полученное декартовым произведением  $m$  раз множества целых чисел  $Z$  на себя. Введем понятие геометрической среды. Среда  $G = (R_G, Q, P, \delta_G, \lambda_G)$  будет называться  $m$ -мерной геометрической средой, если она определена следующим образом. Множество вершин  $R_G$  представляет собой произвольное подмножество множества  $Z^m$ , т.е. вершинами

геометрической среды являются точки с целочисленными координатами  $m$ -мерного действительного пространства. Множеством  $P$  отметок вершин геометрической среды являются  $m$ -мерные упорядоченные наборы символов из алфавита  $U = \{\vdash, +, \dashv, \square\}$ . А именно, пусть  $r = (z_1, z_2, \dots, z_m) \in Z^m$  произвольная вершина среды  $G$ . Обозначим через  $e_i^m = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$   $m$ -мерный вектор, все компоненты которого, кроме  $i$ -го, равны нулю, а  $i$ -ый компонент равен 1. Нулевой вектор обозначим через  $e_0^m$ . Тогда в отметке  $(x_1, \dots, x_m) \in P$  вершины  $r$  компонента  $x_i$ ,  $1 \leq i \leq m$ , определяется по следующей формуле:

$$x_i = \begin{cases} +, & \text{если } r + e_i^m \in R_G, r - e_i^m \in R_G; \\ \vdash, & \text{если } r + e_i^m \in R_G, r - e_i^m \notin R_G; \\ \dashv, & \text{если } r + e_i^m \notin R_G, r - e_i^m \in R_G; \\ \square, & \text{если } r + e_i^m \notin R_G, r - e_i^m \notin R_G. \end{cases}$$

Входным алфавитом  $Q$  геометрической среды является нулевой вектор  $e_0^m$  и векторы  $e_i^m$ ,  $1 \leq i \leq m$ , со знаком  $+$  или  $-$ , т.е.

$$Q = \{-e_i^m, +e_i^m\}_{1 \leq i \leq m} \cup \{e_0^m\}.$$

Значение функции переходов  $\delta_G(r, d)$  для произвольной вершины среды  $r$  и входного символа  $d \in Q$  определено в том и только том случае, если точка  $r + d$  из  $Z^m$  принадлежит  $R_G$ . При этом  $\delta_G(r, d) = r + d$ .

Далее для произвольной вершины  $r = (z_1, \dots, z_i, \dots, z_m)$  геометрической среды число  $z_i$ ,  $1 \leq i \leq m$ , будет называться значением  $i$ -ой координаты вершины  $r$ .

Из определения геометрической среды следует, что ее множество вершин однозначно задает функции переходов и выходов. Геометрическая среда называется конечной, если ее множество вершин конечно.

Будем говорить, что размер произвольного класса геометрических сред ограничен в  $i$ -ой координате числом  $h$ , если для любой среды из этого класса абсолютное значение разности  $i$ -ых координат любых двух ее вершин не превосходит  $h$ .

Оставшаяся часть раздела посвящена исследованию эффективности различных  $m$ -мерных геометрических сред, ограниченных по произвольным  $m - 1$  координатам.

Обозначим через  $Z^+$  множество целых неотрицательных чисел. Пусть  $h \in Z^+$ . Обозначим через  $T(h)$  множество целых чисел  $\{0, 1, \dots, h\}$ . Зафиксируем набор чисел  $h_1, h_2, \dots, h_{m-1} \in Z^+$ . Обозначим через  $T(h_1, \dots, h_{m-1})$  множество  $T(h_1) \times \dots \times T(h_{m-1})$ .

Пусть  $\mathcal{F}$  — класс всевозможных геометрических сред, множества вершин которых включаются в  $T(h_1, \dots, h_{m-1})$ . Из определения следует, что все среды из  $\mathcal{F}$  конечны и сам класс  $\mathcal{F}$  конечен. Введем произвольный вспомогательный алфавит  $V_0$  с числом символов равным числу элементов в классе  $\mathcal{F}$ . Установим произвольное взаимоднозначное соответствие между символами из  $V_0$  и средами из  $\mathcal{F}$ . Если  $v \in V_0$ , то через  $\mathcal{F}(v)$  будет обозначаться среда, принадлежащая  $\mathcal{F}$  и соответствующая символу  $v$ . Введем также вспомогательный символ  $\phi$  не входящий в  $V_0$ . Обозначим через  $V$  алфавит  $V_0$ , пополненный символом  $\phi$ . Пусть число символов в алфавите  $V \times V_0 \times V$  равно  $n$ . Пронумеруем  $V \times V_0 \times V$  числами от 1 до  $n$ . Рассмотрим произвольный символ  $(a, b, c) \in V \times V_0 \times V$ . Предположим он имеет номер  $i$ . Тогда через  $F(i)$  обозначим среду, полученную из  $\mathcal{F}(b)$  следующим преобразованием ее отметок вершин. Рассмотрим произвольную вершину  $r \in R_{\mathcal{F}(b)}$ . Пусть она имеет отметку  $(u_1, \dots, u_{m-1})$ , где  $u_i \in U = \{\vdash, +, \dashv, \square\}$ ,  $1 \leq i \leq m - 1$ .

Определим значение символа  $u_m$ :

$$u_m = \begin{cases} +, & r \in R_{\mathcal{F}(a)}, r \in R_{\mathcal{F}(c)}; \\ \vdash, & r \in R_{\mathcal{F}(a)}, r \notin R_{\mathcal{F}(c)}; \\ \dashv, & r \notin R_{\mathcal{F}(a)}, r \in R_{\mathcal{F}(c)}; \\ \square, & r \notin R_{\mathcal{F}(a)}, r \notin R_{\mathcal{F}(c)}. \end{cases}$$

Добавим к формуле одно замечание: считаем по определению, что символ  $R_{\mathcal{F}(\phi)}$  обозначает пустое множество. Определив таким образом символ  $u_m$ , заменим указанную отметку вершины  $r$  на отметку  $(r, u_1, \dots, u_{m-1}, u_m)$ . Преобразование среды  $\mathcal{F}(b)$  в среду  $F(i)$  закончено. В силу того, что в обозначение новой отметки введен символ  $r$ , отметки всех вершин среды  $F(i)$  попарно различаются между собой. Пусть  $P(i)$  равно множеству вершин  $R_{F(i)}$ . Определим функцию  $\delta_{ij} : P(i) \times Y \rightarrow P(j)$ , где  $Y = \{-1, +1\}$ . Для произвольных  $r \in P(i)$  и  $y \in Y$  полагаем, что  $\delta_{ij}(r, y) = r$ , если  $r \in P(j)$ , и  $\delta_{ij}(r, y)$  произвольно, если  $r \notin P(j)$ , но это произвольное значение назовем фиктивно-доопределенным значением функции  $\delta_{ij}$ .

Рассмотрим теперь эффективный канонический класс лент  $E$  с усеченным входным алфавитом  $Y = \{-1, +1\}$ , выходным алфавитом  $X = V \times V_0 \times V$  и заданный некоторой формулой  $\Phi(E) \subseteq X^*$ . Считаем, что в формальном определении лент (стр. 3.1) символы  $L$  и  $R$  обозначают то же самое, что и символы  $-1$  и  $+1$  соответственно.

Ниже будут рассмотрены различные формулы  $\Phi(E)$ . Но в каждом случае слово в алфавите  $V \times V_0 \times V$  принадлежит языку  $\Phi(E)$  только, если оно имеет вид

$$(\phi, v_1, v_2)(v_1, v_2, v_3) \dots (v_{k-2}, v_{k-1}, v_k)(v_{k-1}, v_k, \phi).$$

Для удобства будем считать, что вершинами лент из класса  $E$  являются целые неотрицательные числа. При этом, левой гра-

ницей каждой ленты является число 0, и любые две соседние вершины отличаются на единицу.

Выполним одномерное преобразование вершин лент класса  $E$  по определенным выше  $F(i)$ ,  $P(i)$ ,  $\delta_{ij}$ ,  $1 \leq i, j \leq n$ . В силу следствия 2.3.2 полученный класс  $G$  квазилент эффективен. Выполним дополнительно над  $G$  ряд простейших преобразований с целью получить из  $G$  класс геометрических сред.

Сначала сделаем неопределенными все значения функции переходов среды  $G$ , которые были построены при помощи фиктивно-доопределенных значений функций  $\delta_{ij}$ ,  $1 \leq ij \leq n$ . А именно, переход  $\delta_G((r, r_E), y)$ , где  $y \in \{-1, +1\}$ ,  $r_E \in R_E$ ,  $r \in R_{F(i)}$ ,  $i$  — номер отметки вершины  $r_E$ , делаем неопределенным, если он был равен  $(\delta_E(r_E, y), \delta_{ij}(r, y))$ , где  $j$  — номер отметки вершины  $\delta_E(r_E, y)$ , и  $\delta_{ij}(r, y)$  — фиктивно-доопределенное значение функции  $\delta_{ij}$ . Это преобразование среды  $G$  сохраняет эффективность в силу следствия 2.2.1.

Напомним, что отметки вершин среды  $G$  имеют вид

$$(r, u_1, \dots, u_m).$$

Изменим их на вид  $(u_1, \dots, u_m)$ . Это преобразование соответствует переименованию отметок вершин. По теореме 2.1.2 оно сохраняет эффективность.

И наконец, по построению входной алфавит среды  $G$  состоит из символов  $\{-e_i^{m-1}, +e_i^{m-1}\}_{1 \leq i \leq m-1} \cup \{e_0^{m-1}, -1, +1\}$ . Переобозначим  $(m-1)$ -мерные векторы  $e_i^{m-1}$  в  $m$ -мерные векторы  $(e_i^{m-1}, 0)$ , а символ  $1$  — в  $m$ -мерный вектор  $(e_0^{m-1}, 1)$ . В результате входной алфавит среды  $G$  состоит теперь из символов  $-e_i^m, +e_i^m, 1 \leq i \leq m$ , и символа  $e_0^m$ . Поскольку было проделано обычное взаимоднозначное переобозначение символов, среда  $G$  по-прежнему остается эффективной.

В результате всех этих преобразований получен класс сред  $G$ , который полностью соответствует определению  $m$ -мерных геометрических сред, ограниченных по первым  $m - 1$  координатам числами  $h_1, h_2, \dots, h_{m-1}$  соответственно.

Эффективность класса  $G$  следует из эффективности класса  $E$ . В частности, класс  $G$  эффективен, если формула  $\Phi(E)$  представляет собой контекстно-свободный или регулярный язык.

Рассмотрим два примера, когда формула  $\Phi(E)$  регулярна.

1. Пусть  $\Phi(E)$  представляет собой язык всевозможных слов вида  $(\phi, v_1, v_2)(v_1, v_2, v_3) \dots (v_{k-2}, v_{k-1}, v_k)(v_{k-1}, v_k, \phi)$ . Тогда класс  $G$  превращается в класс, эквивалентный классу всех  $m$ -мерных геометрических сред, ограниченных по первым  $m - 1$  координатам числами  $h_1, \dots, h_{m-1}$ . Поскольку условие ограниченности класса именно по первым  $m - 1$  координатам возникло только из удобства, то в самой общей форме последний результат можно выразить так.

**Следствие 3.2.1** *Класс всех  $m$ -мерных геометрических сред, ограниченных по произвольным  $m - 1$  координатам, является эффективным.*

2. Пусть символ  $v$  из алфавита  $V_0$  такой, что множество вершин среды  $\mathcal{F}(v)$  равно  $T(h_1, h_2, \dots, h_{m-1})$ . Рассмотрим формулу  $\Phi(E)$  содержащую все слова вида  $(\phi, v, v)(v, v, v) \dots (v, v, \phi)$ . В этом случае  $G$  превращается в класс геометрических сред, в котором каждая среда имеет множество вершин вида

$$T(h_1, h_2, \dots, h_{m-1}, h),$$

где  $h$  — произвольное неотрицательное число. Среды такого вида будем называть  $m$ -мерными прямоугольниками, а числа  $h_1, h_2, \dots, h_{m-1}, h$  называть его размерами соответственно по 1-ой, 2-ой и т.д. координатам.

Класс  $m$ -мерных прямоугольников назовем классом с фиксированными размерами  $h_1, h_2, \dots, h_k$  по координатам из списка  $\{i_1, i_2, \dots, i_k\}$ ,  $k \leq m$ , если каждая среда из этого класса имеет по координатам  $i_1, i_2, \dots, i_k$  размеры  $h_1, h_2, \dots, h_k$  соответственно.

**Следствие 3.2.2** *Класс всех  $m$ -мерных прямоугольников с фиксированными размерами по произвольным  $m - 1$  координатам является эффективным.*

**Следствие 3.2.3** *Класс всевозможных 2-мерных прямоугольников с фиксированным размером хотя бы по одной координате является эффективным.*

Заметим, что в разделе 3.4 будет доказана неэффективность класса всех 2-мерных прямоугольников.

### 3.3 Двумерные квазиленты

**Определение 3.3.1** *Среда, полученная двумерным преобразованием вершин некоторого класса лент, называется двумерной квазилентой.*

Содержание настоящего раздела является продолжением раздела 2.4. Благодаря удобному представлению классов лент в виде формул, теперь появилась возможность описать частный случай двумерного преобразования сред (необязательно лент), при котором эффективность результирующей среды следует из эффективности исходной — как и в случае одномерного преобразования. Цель данного раздела построить эффективный класс геометрических сред, доказательство эффективности которого средствами одномерного преобразования лент невозможно.

Пусть  $E = (R_E, Y, X, \delta_E, \lambda_E)$  — произвольная эффективная среда, где  $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ . Зададим требуемые  $\mathcal{F}$ ,  $\mathcal{P}$ ,

$\Delta$ ,  $I$  для двумерного преобразования вершин среды  $E$ . Пусть  $\mathcal{F} = \{\mathcal{F}(i)\}_{1 \leq i \leq n}$ , где  $\mathcal{F}(i)$  являются эффективными классами лент  $\{F_k(i)\}_{k \in I(i)}$  с входным алфавитом  $Q$ , выходным  $P$  и заданными формулами  $\Phi(\mathcal{F}(i))$ . Удобно считать, что индексом  $k$  ленты  $F_k(i)$  является ее формула. Таким образом,  $I(i) = \Phi(\mathcal{F}(i))$ .

Для каждого  $i$ ,  $1 \leq i \leq n$ , выделим из  $P$  подмножество  $P(i)$  такое, что для любого  $p \in P(i)$  в каждой ленте из  $\mathcal{F}(i)$  существует единственная вершина с отметкой  $p$ ; как было договорено в разделе 2.3, вершина с такой отметкой  $p$  будет обозначаться тем же символом  $p$ , т.е.  $P(i) \subseteq R_{F_k(i)}$ . Зададим произвольные всюду определенные функции

$$\delta_{ij} : P(i) \times Y \rightarrow P(j),$$

где  $1 \leq i, j \leq n$ . И, наконец, выделим из  $I(1) \times \dots \times I(n)$  некоторое подмножество  $I$ , но сделаем это так, чтобы выполнялось следующее условие.

Введем вспомогательный символ  $\pi$ , не принадлежащий алфавиту  $P$ . Обозначим через  $P_\pi$  алфавит  $P$  пополненный символом  $\pi$ . Рассмотрим произвольный набор

$$(k_1, \dots, k_n) \in I(1) \times \dots \times I(n).$$

Пусть  $k_i$ ,  $1 \leq i \leq n$ , является словом  $p_1^i \dots p_{l_i}^i$  длины  $l_i$ . Пусть  $l = \max(l_1, \dots, l_n)$ . Преобразуем  $k_i$  в слово  $k_i^\pi = p_1^i \dots p_{l_i}^i \pi \dots \pi$  длины  $l$ . Получившийся набор  $(k_1^\pi, \dots, k_n^\pi)$  можно теперь рассматривать как слово длины  $i$  в алфавите  $P_\pi^n$ . Преобразовав таким образом каждый набор из  $I$ , мы получим язык в алфавите  $P_\pi^n$ , который обозначим через  $\pi(I)$ . Множество  $I$  должно быть выбрано так, чтобы язык  $\pi(I)$  был регулярным.

Далее понадобятся два утверждения.

**Лемма 3.3.1** Пусть  $\Phi_i$  — произвольный регулярный язык в алфавите  $P$ ,  $1 \leq i \leq n$ . Тогда язык  $\pi(\Phi_1 \times \dots \times \Phi_n)$  является регулярным.

**Доказательство.** Поскольку язык  $\Phi_i$  регулярный, то регулярным является язык  $\Phi_i \cdot \pi^*$ ,  $1 \leq i \leq n$ , где  $\cdot$  — символ операции конкатенации языков,  $*$  — символ операции замыкания Клини. Пусть  $N_i = (S_i, P_\pi, \delta_i, s_0^i, K_i)$  — автомат Рабина-Скотта, допускающий язык  $\Phi_i \cdot \pi^*$ , где  $S_i$  — множество состояний,  $P_\pi$  — входной алфавит,  $\delta_i$  — функция переходов,  $s_0^i$  — начальное состояние,  $K_i$  — множество заключительных состояний,  $1 \leq i \leq n$ . Таким образом,  $p_1 \dots p_k \in \Phi_i \cdot \pi^*$  в том и только том случае, если  $\delta_i(s_0^i, p_1 \dots p_k) \in K_i$ .

Построим автомат Рабина-Скотта  $N = (S, P_\pi^n, \delta, s_0, K)$ , который допускает язык  $\pi(\Phi_1 \times \dots \times \Phi_n)$ . Его состояния определим таким образом: 1)  $S = S_1 \times \dots \times S_n \cup \{-\}$ , где  $-$  — вспомогательное состояние из которого не достижимы заключительные, 2)  $s_0 = (s_0^1, \dots, s_0^n)$ , 3)  $K = K_1 \times \dots \times K_n$ . Определим функцию  $\delta$ . Рассмотрим произвольное состояние  $s = (s_1, \dots, p_n)$  и символ  $p = (p_1, \dots, p_n) \in P_\pi^n$ . Полагаем, что  $\delta(-, p) = -$  и

$$\delta(s, p) = \begin{cases} -, & p = (\pi, \pi, \dots, \pi), \\ (\delta_1(s_1, p_1), \dots, \delta_n(s_n, p_n)), & p \neq (\pi, \pi, \dots, \pi). \end{cases}$$

Из построения следует, что слово  $p_1^\pi \dots p_k^\pi$  допускается автоматом  $N$  в том и только том случае, если для любого  $i$ ,  $1 \leq i \leq n$ , слово  $p_1 \dots p_k$ , где  $p_j$  является  $i$ -ой компонентой символа  $p_j^\pi$ ,  $1 \leq j \leq k$ , принадлежит  $\Phi_i \cdot \pi^*$  и  $p_j^\pi \neq (\pi, \pi, \dots, \pi)$ ,  $1 \leq j \leq k$ . Следовательно,  $N$  допускает язык  $\pi(\Phi_1 \times \dots \times \Phi_n)$ . Лемма доказана.

**Лемма 3.3.2** Пусть  $\Phi_i$  — произвольный регулярный язык в алфавите  $P$ ,  $1 \leq i \leq n$ . Тогда подмножество всех наборов  $(k_1, \dots, k_n)$

из  $\Phi_1 \times \dots \times \Phi_n$  таких, что длина слов  $k_i$ ,  $1 \leq i \leq n$ , одинакова, является регулярным языком в алфавите  $P^n$ .

**Доказательство.** Действительно, из определения следует, что указанный язык является множеством всех слов в алфавите  $P^n$ , принадлежащих  $\pi(\Phi_1 \times \dots \times \Phi_n)$ . Таким образом, этот язык допускается автоматом Рабина-Скотта  $N$ , из доказательства предыдущей леммы, в котором функция  $\delta$  принимает значение "—" еще и в том случае, когда во входном символе  $(p_1, \dots, p_n)$  одна из компонент  $p_i$ ,  $1 \leq i \leq n$ , равна  $\pi$ . Лемма доказана.

Пусть среда  $J = (R_J, Q \cup Y, P, \delta_J, \lambda_J)$  получена двумерным преобразованием вершин среды  $E$  по определенным выше  $\mathcal{F}$ ,  $\mathcal{P}$ ,  $\Delta$ ,  $I$ . Докажем, что  $J$  эффективна.

Рассмотрим произвольный совместимый с  $J$  акцептор  $A_{s_0, s_1}$ . Покажем, что множество индексов  $I(i, (v, w))$ ,  $1 \leq i \leq n$ , определенное в разделе 2.4, где

$$v \in S_A \times P(I) \bigcup \{(s_0, -)\}, \quad w \in S_A \times P(I) \bigcup \{(s_1, -), (-, -)\},$$

является регулярным языком. Для этого достаточно рассмотреть следующие варианты: 1)  $v, w \in S_A \times P(i)$ , 2)  $v \in S_A \times P(i)$ ,  $w = (s_1, -)$ , 3)  $v \in S_A \times P(i)$ ,  $w = (-, -)$ , 4)  $v = (s_0, -)$ ,  $w \in S_A \times P(i)$ , 5)  $v = (s_0, -)$ ,  $w = (s_1, 0)$ , 6)  $v = (s_0, -)$ ,  $w = (-, -)$ .

1. Пусть  $v, w \in S_A \times P(i)$ ,  $v = (s', p')$ ,  $w = (s'', p'')$ . Тогда множество  $I(i, (v, w))$  представляет собой формулу всех лент  $F$  из  $\mathcal{F}(i)$  таких, что траектория  $\text{Tr}_{AF}([s', p'])$  заканчивается тупиком  $[s'', p'']$  и не содержит заключительную конфигурацию.

$A_{s_0, s_1}$  в общем случае не совместим со средой  $\mathcal{F}(i)$ . Преобразуем  $A_{s_0, s_1}$  в некоторый, уже совместимый с  $\mathcal{F}(i)$ , акцептор такой, что он при взаимодействии с лентой  $F \in \mathcal{F}(i)$  достигнет заключительного состояния в том и только том случае, если формула ленты  $F$  принадлежит  $I(i, (v, w))$ .

Добавим к  $A_{s_0, s_1}$  три состояния:  $t_0, t_1, t_2$ . Из состояния  $t_0$  переходы по всем входным сигналам, кроме  $p'$ , ведут в состояние  $t_2$ . Выходные сигналы при этом произвольные. По  $p'$  переход из  $t_0$  ведет в то состояние  $s \in S_A$ , в которое переходит акцептор  $A_{s_0, s_1}$  из  $s'$  по тому же сигналу  $p'$ . Выходной сигнал при этом тот же, что и у  $s'$ . Из  $t_2$  все переходы ведут в него же и выходные сигналы произвольные. Далее, для каждого состояния  $s \in S_A$ , кроме  $s''$ , изменим значение функции переходов и выходов по всем входным сигналам  $p$  таким, что  $\lambda_A(s, p) \in Y$ . Все такие переходы направим в  $t_2$ , а значение  $\lambda_A(s, p)$  изменим так, чтобы преобразованный акцептор был совместим с  $\mathcal{F}(i)$ . Аналогично поступим для  $s''$ , но с одним исключением. Из  $s''$  переход по входному сигналу  $p''$  направим в  $t_1$ . Значения функций состояния  $t_1$  определим произвольно. И, наконец, все переходы из состояния  $s_1$  направим в  $t_2$ . Заметим, что везде, где было сказано "произвольно", имелось в виду, что преобразованный акцептор должен быть совместим с  $\mathcal{F}(i)$ . В преобразованном акцепторе начальным состоянием объявим  $t_0$ , заключительным —  $t_1$ , сам акцептор обозначим через  $A'_{t_0, t_1}$ .

В результате такого построения  $A'_{t_0, t_1}$  имеем следующее. При взаимодействии  $A'_{t_0, t_1}$  и произвольной ленты  $F$  из  $\mathcal{F}(i)$  акцептор из любой начальной конфигурации  $[t_0, r]$ , где  $r$  имеет отметку, отличную от  $p'$ , переходит в состояние  $t_2$ , из которого не достижимо  $t_1$ . Если же  $r$  имеет отметку  $p'$ , то траектории  $\text{Tr}_{AF}([s', p'])$  и  $\text{Tr}_{A'F}([t_0, p'])$  со второго шага начинают совпадать и совпадают до тех пор пока в  $\text{Tr}_{AF}([s', p'])$  не встретится либо тупиковая конфигурация  $[s, p]$  отличная от  $[s'', p'']$ , тогда  $A'_{t_0, t_1}$  переходит в состояние  $t_2$ , либо встретится конфигурация вида  $[s_1, r]$ , и опять  $A'_{t_0, t_1}$  перейдет в  $t_2$ . И в том и только том случае, если в  $\text{Tr}_{AF}([s', p'])$  встретится конфигурация  $[s'', p'']$  и акцептор  $A_{s_0, s_1}$  еще не был в состоянии  $s_1$ ,  $A'_{t_0, t_1}$  достигнет заключительной конфигурации. Следова-

но, акцептор  $A'_{t_0, t_1}$  удовлетворяет требуемым от него условиям. По следствию 3.1.5  $I(i, (v, w))$  является регулярным языком.

2. Пусть  $v \in S_A \times P(i)$ ,  $v = (s, p)$ ,  $w = (s_1, -)$ . Тогда множество  $I(i, (v, w))$  представляет собой формулу всех лент  $F$  из  $\mathcal{F}(i)$  таких, что траектория  $\text{Tr}_{AF}([s, p])$  содержит заключительную конфигурацию. Доказательство регулярности языка  $I(i, (v, w))$  в этом случае аналогично варианту 1, но с одним изменением: не добавляется состояние  $t_1$  и, соответственно, все изменения связанные с  $t_1$  отменяются. Преобразованный акцептор в этом случае имеет заключительное состояние  $s_1$ .

3. Пусть  $v \in S_A \times P(i)$ ,  $v = (s, p)$ ,  $w = (-, -)$ . Тогда множество  $I(i, (v, w))$  представляет собой формулу всех лент  $F$  из  $\mathcal{F}(i)$  таких, что траектория  $\text{Tr}_{AF}([s, p])$  не заканчивается тупиком и не содержит заключительную конфигурацию. Отсюда следует, что

$$I(i, (v, w)) = I(i) \setminus \bigcup_{w' \in S_A \times P(i) \cup \{(s_1, -)\}} I(i, (v, w')).$$

Здесь  $\setminus$  — символ разности множеств. Как видно,  $I(i, (v, w))$  получено конечным числом операций над регулярными языками и, следовательно, само является регулярным языком.

Рассмотрим теперь произвольные функцию  $\psi_i$ , множество  $\theta_i$  и соответствующий им язык  $I(i, \psi_i, \theta_i)$ , как они определены в разделе 2.4. Из сказанного выше следует, что  $I(i, \psi, \theta_i)$  регулярен, поскольку является конечным пересечением регулярных языков. Обозначим через  $\bar{I}$  множество

$$I(1, \psi_1, \theta_1) \times \dots \times I(n, \psi_n, \theta_n).$$

Понятно, что множество  $I \cap \bar{I}$  пусто тогда и только тогда, когда пуст язык  $\pi(I) \cap \pi(\bar{I})$ . Последнее алгоритмически разрешимая проблема, поскольку  $\pi(I)$  регулярно, и, по лемме 3.3.1,  $\pi(\bar{I})$  регу-

лярно. Значит среда  $J$  эффективная. В результате доказана следующая теорема.

**Теорема 3.3.1** *Если среда  $J$  получена двумерным преобразованием эффективной среды  $E$  по заданным  $\mathcal{F}$ ,  $\mathcal{P}$ ,  $\Delta$ ,  $I$ , при котором  $\mathcal{F}$  представляет собой множество классов лент, заданных регулярными формулами, и язык  $\pi(I)$  является регулярным, то среда  $J$  является эффективной.*

В качестве следствия из этой теоремы приведем пример эффективного класса  $\mathcal{H}$  квазилент, являющихся к тому же 2-мерными геометрическими средами. Определим этот класс  $\mathcal{H}$ . Каждая среда из  $\mathcal{H}$  однозначно задается парой целых чисел  $k$  и  $l$ , где  $k \geq 3$  и является нечетным числом,  $l \geq 2$ . Соответствующим обозначением такой среды будет  $H_{k,l}$ . Точка  $(z_1, z_2)$  является вершиной среды  $H_{k,l}$ , если, во-первых,  $1 \leq z_1 \leq k$  и  $1 \leq z_2 \leq l$ , и, во-вторых, либо  $z_1$  — нечетное, либо, если  $z_1$  — четное, то  $z_2 = 1$  или  $z_2 = l$

Зададим определенный нами класс  $\mathcal{H}$  двумерным преобразованием вершин некоторой среды  $E$ . Определим для этого все необходимое. Пусть среда  $E$  — это класс канонических лент, заданный регулярной формулой  $x_1(x_2x_3)^*x_2x_4$ . Будем считать, что входной алфавит среды  $E$  состоит из двух символов:  $-e_1^2 = (-1, 0)$  (движение влево) и  $+e_1^2 = (+1, 0)$  (движение вправо). Символ движения на месте  $e_0^2 = (0, 0)$  отсутствует. Переход по  $(-1, 0)$  не определен только из вершин с отметкой  $x_1$ , по  $(+1, 0)$  не определен только из вершин с отметкой  $x_4$ . Классы  $\mathcal{F}(i)$ ,  $1 \leq i \leq 4$ , — это ленты, заданные соответственно формулами  $I(1) = p_1p^*p_2$ ,  $I(2) = p_3p_4$ ,  $I(3) = p_5p^*p_6$ ,  $I(4) = p_7p^*p_8$ . Из любой вершины лент этих классов определено движение на месте  $(0, 0)$ . Причем, для вершин с отметками  $p_3$ ,  $p_4$  это еще и единственный переход, который для них

определен. Из вершин с отметками  $p_1, p_5, p_7, p$  переход определен также по сигналу  $-e_2^2 = (0, -1)$ . Из вершин с отметками  $p_2, p_6, p_8, p$  переход определен также по сигналу  $+e_2^2 = (0, +1)$ .

Множества  $P(i)$ ,  $1 \leq i \leq 4$ , определяем так:  $P(1) = \{p_1, p_2\}$ ,  $P(2) = \{p_3, p_4\}$ ,  $P(3) = \{p_5, p_6\}$ ,  $P(4) = \{p_7, p_8\}$ .

Функции из класса  $\Delta$  зададим в виде множеств пар:(аргумент функции, значение функции). Все значения, которые явно не будут указаны, определяются произвольно и называются фиктивно-доопределенными:

$$\begin{aligned} \delta_{12} &= \{((p_1, +e_1^2), p_3), ((p_2, +e_1^2), p_4)\}, \\ \delta_{21} &= \{((p_3, -e_1^2), p_1), ((p_4, -e_1^2), p_2)\}, \\ \delta_{23} &= \{((p_3, +e_1^2), p_5), ((p_4, +e_1^2), p_6), \\ &((p_3, -e_1^2), p_5), ((p_4, -e_1^2), p_6)\}, \\ \delta_{32} &= \{((p_5, +e_1^2), p_3), ((p_6, +e_1^2), p_4), \\ &((p_5, -e_1^2), p_3), ((p_6, -e_1^2), p_4)\}, \\ \delta_{24} &= \{((p_3, +e_1^2), p_7), ((p_4, +e_1^2), p_8)\}, \\ \delta_{42} &= \{((p_7, -e_1^2), p_3), ((p_8, -e_1^2), p_4)\}. \end{aligned}$$

Множество  $I$  — это все наборы  $(k_1, \dots, k_n)$  слов одинаковой длины из  $I(1) \times \dots \times I(n)$ . По лемме 3.3.2 язык  $\pi(I)$  регулярен.

Выполним определенное двумерное преобразование вершин среды  $E$  и далее сделаем неопределенными все фиктивно-доопределенные значения функции переходов (теорема 2.2.1). Легко видеть, что построенная таким образом среда эквивалентна классу  $\mathcal{H}$ . По теореме 3.3.1 класс  $\mathcal{H}$  эффективен.

### 3.4 Неэффективная среда — класс прямоугольников

Бесконечную геометрическую среду, образованную множеством  $Z^+$ , назовем целочисленной положительной осью, а геомет-

рическую среду, образованную множеством  $Z^+ \times Z^+$ , назовем целочисленным квадрантом. Из определения геометрической среды следует, что вершина 0 целочисленной оси имеет отметку  $\vdash$ , все остальные вершины — отметку  $+$ . Аналогично: вершина  $(0, 0)$  квадранта имеет отметку  $(\vdash, \vdash)$ ; вершины  $(0, z)$ , где  $z \geq 1$ , имеют отметку  $(\vdash, +)$ ; вершины  $(z, 0)$ , где  $z \geq 1$ , имеют отметку  $(+, \vdash)$ ; все остальные вершины имеют отметку  $(+, +)$ . Взаимодействие произвольного автомата с целочисленным квадрантом — это не что иное, как взаимодействие автомата с двумя осями, при котором автомат в каждый момент времени находится сразу в двух вершинах различных сред (осей) и на вход получает отметки этих вершин. Автомат, взаимодействующий с двумя осями, в литературе известен как машина Тьюринга с двумя счетчиками или как машина Тьюринга с двумя полубесконечными лентами, которая не может ни считывать с ленты, ни записывать, но способна лишь определять, подошла ли лента к концу [22, с.311]. Такие простые модели позволяют моделировать любые вычисления, выполнимые машиной Тьюринга. Из содержания главы 14 книги [22], в частности, из теоремы 14.4.1 на с. 311, следует удобная для наших целей формулировка теоремы.

**Теорема 3.4.1** *Пусть  $p_1, p_2$  — произвольные взаимно-простые числа. Для любой частично-рекурсивной функции  $y = f(x)$  можно построить акцептор такой, что, взаимодействуя с вершиной  $(p \cdot p_1^x, z)$  целочисленного квадранта, где  $p, z$  — произвольные числа,  $p$  не делится на  $p_1$  и  $p_2$ , он достигнет заключительного состояния в том и только том случае, если значение функции  $y = f(x)$  определено и, если оно определено, то акцептор остановится (достигнет заключительного состояния) в вершине среды  $(p \cdot p_1^x \cdot p_2^y, 0)$ .*

**Следствие 3.4.1** *Целочисленный квадрант является неэффективной средой.*

**Доказательство.** Действительно, поскольку проблема пустоты области определения произвольной частично-рекурсивной функции алгоритмически неразрешима, то в силу предыдущей теоремы алгоритмически неразрешима проблема достижимости заключительного состояния произвольным акцептором, взаимодействующим с квадрантом. Следовательно, квадрант — неэффективная среда.

Чтобы продолжить перечень неэффективных сред, напомним некоторые определения из раздела 3.2. Пусть  $h \in \mathbb{Z}^+$ . Тогда через  $T(h)$  обозначим множество целых чисел  $\{0, 1, 2, \dots, h\}$ , через  $T(h_1, \dots, h_m)$  обозначим множество  $T(h_1) \times \dots \times T(h_m)$ . Если геометрическая среда имеет множество вершин  $T(h_1, \dots, h_m)$ , то назовем ее  $m$ -мерным прямоугольником и будем говорить, что она имеет размеры  $h_1, h_2, \dots, h_m$  соответственно по координатам  $1, 2, \dots, m$ . Если  $m$ -мерный прямоугольник имеет одинаковые размеры по всем координатам, то назовем его  $m$ -мерным кубом, 2-мерный куб назовем квадратом. Класс  $m$ -мерных прямоугольников назовем классом с фиксированными размерами  $h_{i_1}, h_{i_2}, \dots, h_{i_k}$  по координатам из списка  $\{i_1, i_2, \dots, i_k\}$ ,  $k \leq m$ , если каждая среда из этого класса имеет по координатам  $i_1, i_2, \dots, i_k$  размеры  $h_1, h_2, \dots, h_k$  соответственно. Класс  $m$ -мерных прямоугольников назовем неограниченным по координатам из некоторого заданного списка, если для сколь угодно большого числа в классе найдется прямоугольник, который имеет по координатам из списка размеры, превышающие это число.

**Следствие 3.4.2** *Произвольный класс 2-мерных прямоугольников, неограниченный по обеим координатам, является неэффек-*

*тичным.*

**Доказательство.** Обозначим через  $K$  квадрант и через  $T$  рассматриваемый класс прямоугольников. Из того, что  $T$  содержит сколь угодно "большой" прямоугольник, следует простое соотношение  $L(K) \subseteq L(T)$ . Рассмотрим произвольный акцептор, взаимодействующий с квадрантом. Поскольку алфавит отметок вершин 2-мерных прямоугольников включает в себя соответствующий алфавит квадранта, то этот акцептор, в общем случае, может быть несовместимым с прямоугольником. Доопределим акцептор. Добавим к нему вспомогательное состояние, из которого недостижимо заключительное, направим в него переходы из всех состояний по всем недостающим входным сигналам, при этом функции выходов доопределим так, чтобы акцептор стал совместимым с классом двумерных прямоугольников. Понятно, что начальные состояния этих акцепторов неотличимы относительно квадранта.

Обозначим здесь через  $\lambda$  множество всех вход-выходных слов, допускаемых исходным акцептором, через  $\lambda'$  — соответствующее множество доопределенного акцептора. Понятно, что исходный акцептор достигает заключительного состояния при взаимодействии с квадрантом в том и только том случае, если не пусто множество  $\lambda \cap L(K)$ . Аналогичное утверждение имеем и для доопределенного акцептора.

В силу построений, с одной стороны, имеем равенство

$$\lambda \cap L(K) = \lambda' \cap L(K)$$

и, с другой стороны, следующее свойство: если некоторое слово принадлежит  $L(T)$ , но не принадлежит  $L(K)$ , то оно также не принадлежит  $\lambda'$ . Отсюда следует, что  $\lambda' \cap L(T) = \lambda' \cap L(K)$  и, далее,  $\lambda' \cap L(T) = \lambda \cap L(K)$ . Другими словами, исходный акцептор при взаимодействии с квадрантом достигнет заключительного состоя-

ния в том и только том случае, если достигнет заключительного состояния доопределенный акцептор при взаимодействии с классом  $T$ .

Следствие доказано.

Отсюда вытекает простое утверждение.

**Следствие 3.4.3** *Любой бесконечный класс попарно не эквивалентных квадратов неэффективен.*

Следствия 3.4.2 и 3.4.3 можно обобщить на  $m$ -мерный случай,  $m \leq 2$ . Это легко понять, если представить, что акцептор, взаимодействуя с  $m$ -мерным прямоугольником, движется только по двум фиксированным координатам среды. Таким образом, имеем еще итакое утверждение.

**Следствие 3.4.4** *Произвольный класс  $m$ -мерных прямоугольников,  $m \geq 2$ , неограниченный хотя бы по двум координатам, является неэффективным.*

Следующее утверждение позволит значительно расширить список примеров неэффективных сред.

**Следствие 3.4.5** *Произвольный класс геометрических  $m$ -мерных сред, где  $m \geq 2$ , содержащий в себе класс  $m$ -мерных прямоугольников с неограниченными размерами хотя бы по двум координатам, является неэффективным.*

**Доказательство.** Для простоты рассмотрим 2-мерный случай. Чтобы доказать это утверждение, воспользуемся фактом, что для произвольной частично-рекурсивной функции  $y = f(x)$  алгоритмически неразрешима проблема: входит значение  $x = 0$  в ее область определения или нет [21]. В силу теоремы 3.4.1, это утверждение можно сформулировать и так: алгоритмически неразрешима проблема достигнет ли произвольный акцептор при взаимодей-

ствии с квадрантом из начальной конфигурации  $[s_0, (0, 0)]$  какую-либо заключительную или нет.

Пусть  $T$  — произвольный класс 2-мерных прямоугольников с неограниченными размерами по обеим координатам и  $E$  — произвольный класс 2-мерных геометрических сред такой, что  $T \subseteq E$ . Пусть  $A_{s_0, s_1}$  — произвольный акцептор, совместимый с  $T$ . Легко видеть, что алгоритмически неразрешима проблема: достигнет ли произвольный акцептор  $A_{s_0, s_1}$  при взаимодействии хотя бы с одним прямоугольником из  $T$  из начальной конфигурации  $[s_0, (0, 0)]$  какую-либо заключительную. Произвольно доопределим  $A_{s_0, s_1}$  до акцептора  $A'_{s_0, s_1}$ , совместимого с  $E$ , но для этого введем дополнительное состояние, из которого недостижимо заключительное, и направим в него все доопределенные переходы.

Теперь покажем, как построить акцептор  $B_{t_0, t_1}$ , совместимый с  $E$ , который, при взаимодействии с произвольной средой  $e \in E$ , достигает заключительного состояния в том и только том случае, если  $e$  содержит компоненту связности, являющуюся прямоугольником. При этом, акцептор достигнет заключительного состояния в вершине  $(0, 0)$  этого прямоугольника. Для доказательства всего утверждения этого будет достаточно, поскольку, отождествив далее заключительное состояние акцептора  $B_{t_0, t_1}$  с начальным состоянием акцептора  $A'_{s_0, s_1}$ , получим акцептор с начальным состоянием  $t_0$ , заключительным  $s_1$ , который при взаимодействии с  $E$  достигнет заключительного состояния в том и только том случае, если  $A_{s_0, s_1}$  достигнет заключительного состояния из конфигурации  $[s_0, (0, 0)]$  при взаимодействии с  $T$ .

При построении акцептора  $B_{t_0, t_1}$  воспользуемся следующим простым свойством прямоугольников. Произвольная геометрическая среда с множеством вершин  $R$  является прямоугольником в том и только том случае, если из того, что среди произволь-

ных четырех точек с координатами  $(z_1, z_2)$ ,  $(z_1 + 1, z_2)$ ,  $(z_1, z_2 + 1)$ ,  $(z_1 + 1, z_2 + 1)$  три принадлежат  $R$ , то необходимо принадлежит  $R$  и четвертая. Далее это свойство будем называть локальным свойством прямоугольников.

Таким образом, определяемый акцептор  $B_{t_0, t_1}$ , априори полагая, что он взаимодействует со средой из  $T$ , из произвольной начальной конфигурации движется в вершину  $(0, 0)$ , т.е. в вершину с отметкой  $(\vdash, \vdash)$ , откуда, последовательно проходя все вершины среды, проверяет локальное свойство прямоугольников.

Например, чтобы попасть в вершину  $(0, 0)$ , акцептору достаточно, пока возможно, выдавать выходной сигнал  $(-1, 0)$ , затем, пока возможно, сигнал  $(0, -1)$ . Чтобы, начиная с  $(0, 0)$ , пройти все вершины среды, из расчета, что эта среда — прямоугольник, акцептору достаточно в цикле, после каждого увеличения значения первой координаты, пока возможно увеличивать значение второй координаты, затем, пока возможно — уменьшать. Акцептор считает, что пройдены все вершины, если он попадает в вершину с одной из отметок  $(\square, \dashv)$ ,  $(\dashv, \square)$ ,  $(\dashv, \dashv)$ . Одновременно с процессом обхода вершин,  $B_{t_0, t_1}$  проверяет локальное свойство прямоугольников. Допустим  $B_{t_0, t_1}$  находится в вершине  $(z_1, z_2)$ . По ее отметке  $B_{t_0, t_1}$  определяет принадлежат ли  $(z_1 + 1, z_2)$  и  $(z_1, z_2 + 1)$  рассматриваемой среде. Если да, то  $B_{t_0, t_1}$  движется в одну из вершин  $(z_1 + 1, z_2)$  или  $(z_1, z_2 + 1)$ , и по ее отметке определяет принадлежит ли  $(z_1 + 1, z_2 + 1)$  среде. Если да, то  $B_{t_0, t_1}$  возвращается в  $(z_1, z_2)$  и продолжает обход среды. Если нет, т.е. локальное свойство не выполняется, то  $B_{t_0, t_1}$  переходит в состояние из которого недостижимо заключительное. И, наконец, после прохода вершин среды, при котором акцептор устанавливает, что она является прямоугольником, акцептор движется в вершину  $(0, 0)$  и переходит в заключительное состояние.

Следствие доказано.

**Следствие 3.4.6** *Класс всевозможных  $t$ -мерных геометрических сред с ограниченными размерами по координатам из заданного списка эффективен в том и только том случае, если список содержит не менее чем  $t - 1$  координат.*

**Следствие 3.4.7** *Класс всевозможных  $t$ -мерных прямоугольников с фиксированными размерами по координатам из заданного списка эффективен в том и только том случае, если список содержит не менее чем  $t - 1$  координат.*

Достаточность последних двух утверждений прямо вытекает из следствий 3.2.1 и 3.2.2 соответственно. Необходимость обоих утверждений вытекает из следствия 3.4.4.

Можно продолжить таким образом начатый список. Наряду с прямоугольниками можно рассмотреть, например, параллелограммы, ромбы. Содержательно понятно, как такие среды определить. Поскольку принципиальных отличий от прямоугольников при этом нет, то и эти среды неэффективны.

Автор считает своим приятным долгом поблагодарить Игоря Сергеевича Грунского и Дмитрия Васильевича Сперанского за их поддержку и помощь при выполнении работы.

## Список литературы

1. Анджанс А.В. Возможности автоматов при обходе одномерных областей // Латвийский мат. ежегодник. – 1983. – вып.2. – С.191-201.
2. Анджанс А.В. Возможности автоматов при обходе плоскости // Проблемы передачи информации. – 1983. – Т.19, вып.3. – С.79-89.
3. Богомоллов А.М., Грунский И.С., Сперанский Д.В. Контроль и преобразование дискретных автоматов. – Киев: Наук.думка, 1975. – 175с.
4. Гинзбург С. Математическая теория контекстно-свободных языков. – М.: Мир, 1979. – 326с.
5. Глушков В.М., Цейтлин Г.Е., Ющенко Е.Л. Алгебра, языки, программирование. – Киев: Наук.думка, 1989. – 376с.
6. Глушков В.М., Летичевский А.А. Теория дискретных преобразователей // Сб.: Избранные вопросы алгебры и логики. – Новосибирск: Наука. – 1973. – С.5-39.
7. Гросс М., Лантен А. Теория формальных грамматик. – М.: Мир, 1971. – 294с.
8. Грунская В.И. О некоторых свойствах траекторий автоматов в лабиринтах: Диссертация канд. физ.-мат. наук: 01.01.09/ АН России. МГУ. – Москва, 1995. – 190л.

9. Грунский И.С. О неотличимости автоматов кратными экспериментами // Докл. АН СССР. – 1982. – 267, №4. – С. 531-533.
10. Грунский И.С., Козловский В.А., Пономаренко Г.Г. Представление конечных автоматов фрагментами поведения. – Киев: Наук.думка, 1990. – 232с.
11. Грунский И.С., Курганский А.Н. Неотличимость конечных автоматов, взаимодействующих со средой // Докл. АН Украины. – 1993. – вып.11. – С.31-33.
12. Грунский И.С., Курганский А.Н. Неотличимость конечных автоматов с ограниченным поведением // Кибернетика и системный анализ. – 1996. – №5. – С.58– 72.
13. Зыков А.А. Основы теории графов. – М.:Наука, 1987. – 380с.
14. Капитонова Ю.В., Летичевский А.А. Математическая теория проектирования вычислительных систем. – М.:Наука, 1988. – 296с.
15. Кудрявцев В.Б. Функциональные системы. М.: Изд-во МГУ, 1982. – 158с.
16. Кудрявцев В.Б., Алешин С.В., Подколзин А.С. Введение в теорию автоматов. М.:Наука, 1985. – 320с.
17. Кудрявцев В.Б., Ущумлич Ш., Килибарда Г. О поведении автоматов в лабиринтах // Дискрет. математика. – 1992. – 4, вып.3. – С.3-28.
18. Кудрявцев В.Б., Подколзин А.С., Ущумлич Ш. Введение в теорию абстрактных автоматов. – М.: Изд-во МГУ. – 1985. – 174с.
19. Курганский А.Н. Об эквивалентности конечных автоматов, взаимодействующих с лабиринтами // Автоматика-95: Тезисы до-

- кл. II Украинской конференции по автоматическому управлению. — Львов, 1996. — Т 1. — С.158.
20. Курганский А.Н. Эквивалентность автоматов, взаимодействующих со средой // Проблемы теор. кибернетики: Тезисы докл. XI Международной конференции. — Ульяновск, 1996. — С.115.
21. Мальцев А.И. Алгоритмы и рекурсивные функции. — М.: Наука, 1965. — 391с.
22. Минский М. Вычисления и автоматы. — М.: Мир, 1971. — 366с.
23. Мур Э.Ф. Умозрительные эксперименты с последовательностными машинами // Автоматы. — М.: Изд-во иностр. лит., 1956. — С.179-210.
24. Общая алгебра. Т.1 / Под ред. Л.А. Скорнякова. — М.:Наука, 1990. — 592с.
25. Общая алгебра. Т.2 / Под ред. Л.А. Скорнякова. — М.:Наука, 1991. — 480с.
26. Рабин М.О., Скотт Д. Конечные автоматы и задачи их разрешения // Кибернетический сборник. — 1962. — 4. — С.58-91.
27. Саломеа А. Жемчужины теории формальных языков. — М.: Мир, 1986. — 159с.
28. Шепердсон Дж.К. Сведение двусторонних автоматов к односторонним автоматам // Кибернетический сборник. — 1962. — 4. — С.92-98.
29. Budach L., Meinel Ch. Environments and Automata // Elektronische Informationsverarbeitung und Kybernetik. — 1982. V.18, № 1,2. — P.3-40.

30. Budach L., Meinel Ch. Environments and Automata // Elektronische Informationsverarbeitung und Kybernetik. – 1982. V.18,  $\mathcal{N}$  3. – P.115-139.
31. Gouda M.E., Manning E.G., Yu Y.T. On the progress of communication between two finite state machines // Information and Control. – 1984. – 63,  $\mathcal{N}$  3. – P.200-216.